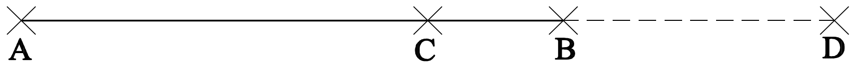
Harmonische Teilung

Nur Mathematiker können außen “teilen” - Der Kreis des Apollonius

Möchte man eine Strecke **AB** beliebiger Länge in einem bestimmten Verhältnis teilen, so haben wir gelernt, dass diese Aufgabe natürlich leicht über Strahlensätze zu bewältigen ist.

Fasst man die Strecke **AB** aber als Teilmenge der Geraden **g(A,B)** auf, so kann man auch nach zwei Punkten **C** und **D** fragen, die Streckenlängen von Teilstrecken dieser Geraden in ein gleiches Verhältnis setzen. Es soll gelten:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}}$$

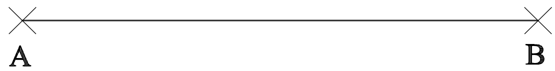


Im dargestellten Beispiel teilt der Punkt C die Strecke AB innen im Verhältnis 3:1, D teilt die Strecke AB außen im gleichen Verhältnis 3:1.

Die vier Punkte A, B, C, D heißen **harmonische Punkte**, die Strecke AB wird durch den Punkt C innen, und durch den Punkt D außen, harmonisch geteilt.

---

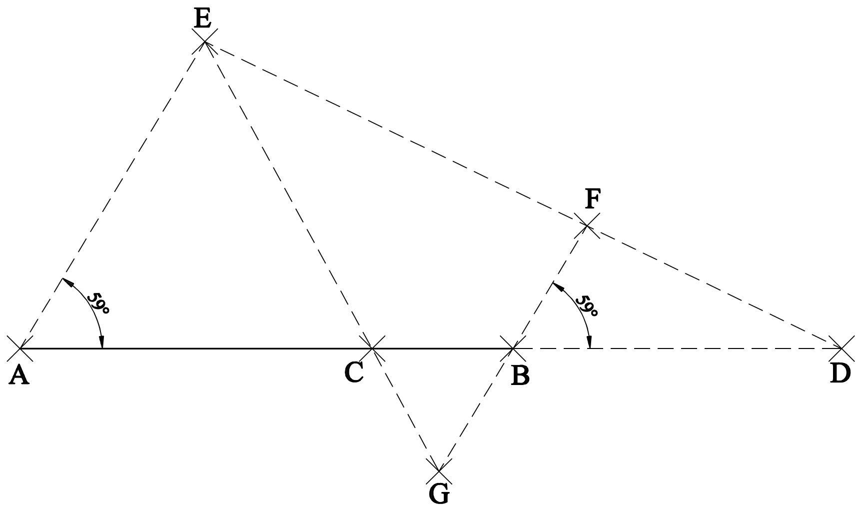
1. Zeichne in dein Heft eine Strecke beliebiger Streckenlänge (aber bitte nicht zu klein und etwa in die Mitte einer Heftseite, so dass du die Skizze noch konstruktiv ergänzen kannst) und teile diese Strecke innen und außen im Verhältnis 5:2, nur mit Zirkel und Lineal.



---

2. Analysiere die nebenstehende Figur und begründe, dass die Konstruktion eine mögliche Lösung von Aufgabe 1 darstellt.

   Begründe, dass die Größe der eingezeichneten, kongruenten Winkel für das Konstruktionsprinzip nicht wesentlich ist und fertige eine Konstruktionsbeschreibung zur Bestimmung der Teilungspunkte **C** und **D** an.



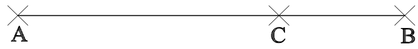
---

3. Beweise: Wenn die Punkte **C** und **D** die Strecke **AB** harmonisch teilen, so teilen auch die Punkte **A** und **B** die Strecke **CD** harmonisch. $\left[\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{m}{n} \Rightarrow \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} = \frac{m-n}{m+n}\right]$

   Führe den Beweis algebraisch und geometrisch (d.h. durch geeignete Ergänzung der Beweisfigur). Begründe die Beweisschritte.

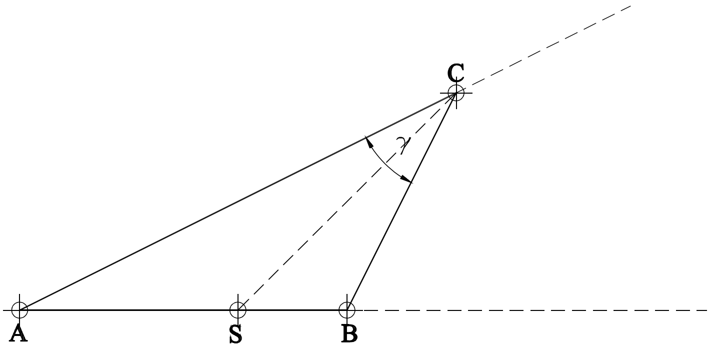
---

4. Zeichne eine Strecke **AB** beliebiger Länge (aber bitte nicht zu klein und etwa in die Mitte einer Heftseite, so dass du die Skizze noch konstruktiv ergänzen kannst) und wähle einen beliebigen Punkt **C** ∈ **AB**. - Versuche nun einen Punkt **D** zu konstruieren, so dass die 4 Punkte **A**, **B**, **C**, **D** harmonische Punkte sind. - Existiert für jede Lage von **C** ∈ **AB** ein vierter harmonischer Punkt **D** ?



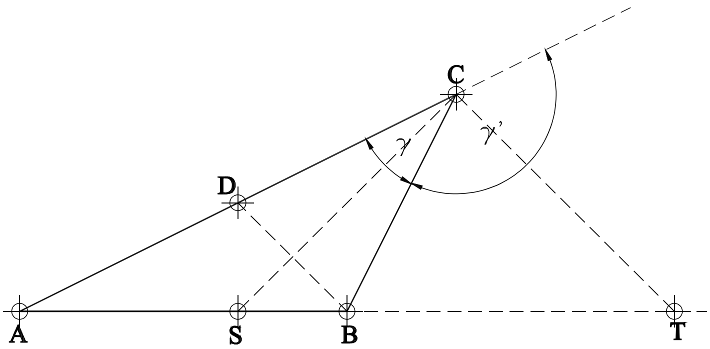
5. Zeichne ein stumpfwinkliges Dreieck (etwa so wie nebenstehend). Die Winkelhalbierende $\mathbf{w}_\gamma$ schneidet die Dreiecksseite **AB** im Punkt **S**.

   Konstruiere einen Punkt **T** auf der Geraden **g(A,B)** so, dass die 4 Punkte **A**, **S**, **B**, **T** harmonische Punkte sind. - Analysiere deine Figur auf Besonderheiten, z.B. die besondere Lage von **T** (oder das Teilungsverhältnis $\overline{AS} : \overline{SB}$) in Bezug auf das Dreieck ΔABC. - Vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn. Schon etwas entdeckt ?



Sicherlich hast du auch den folgenden Sachverhalt entdeckt:

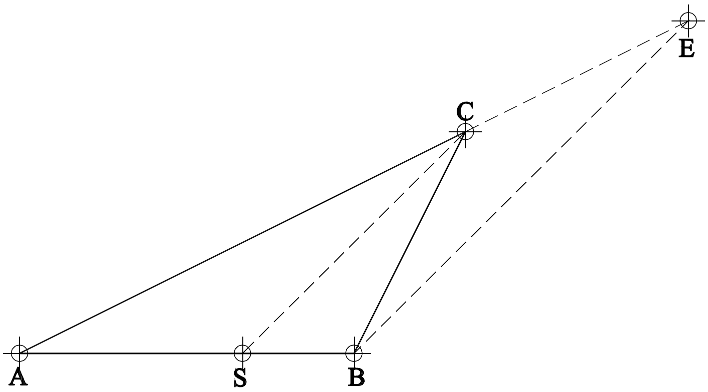
"Eine Winkelhalbierende ($\mathbf{w}_\gamma$) und die zugehörige Winkelhalbierende des Außenwinkels ($\mathbf{w}_{\gamma'}$) teilen die Gegenseite[1] harmonisch und zwar im Verhältnis der Längen der anliegenden Seiten."



6. Die Figur wurde schon durch eine geeignete Hilfslinie ergänzt. - Begründe die folgenden Beweiselemente und ergänze fehlende Beweisschritte (evtl. unter Verwendung der darunter stehenden Hilfsfigur):

$$\overline{DC} = \overline{BC}$$
$$\overline{AT} : \overline{TB} = \overline{AC} : \overline{BC}$$
$$\overline{AS} : \overline{SB} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

$$\boxed{\overline{AS} : \overline{SB} = \overline{AT} : \overline{TB}}$$



---

[1] Bezogen auf den äußeren Teilungspunkt ist natürlich die Verlängerung der Gegenseite gemeint.

Harmonische Teilung

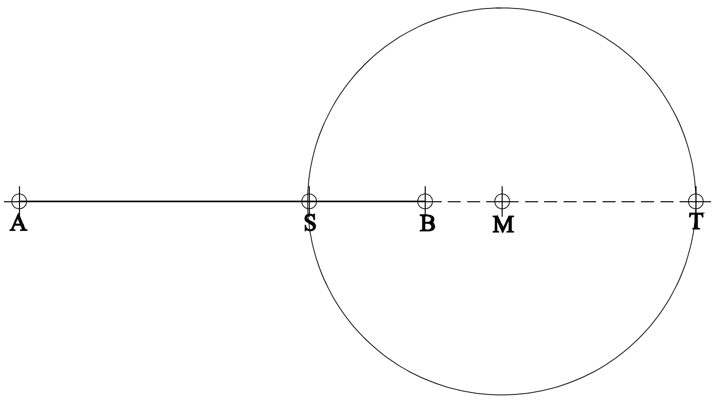
Nur Mathematiker können außen "teilen" - Der Kreis des Apollonius

Bekanntlich liegen alle Punkte, die gleich weit von zwei festen Punkten **A** und **B** entfernt sind, auf der Mittelsenkrechten $\mathbf{m_{AB}}$ der Strecke **AB**.

Apollonios von Perge [✳: ~ 262 vor Chr. in Perga, Pamphylia, Griechenland (nun Murtina, Antalya, Türkei); †: ~ 190 vor Chr. in Alexandria, Ägypten] hat die obige Fragestellung erweitert und hat behauptet:

*Der geometrische Ort aller Punkte **P**, deren Abstände zu zwei Punkten **A** und **B** in einem festen Verhältnis stehen (* $\overline{AP} : \overline{PB} \neq 1$ *) ist ein Kreis.*

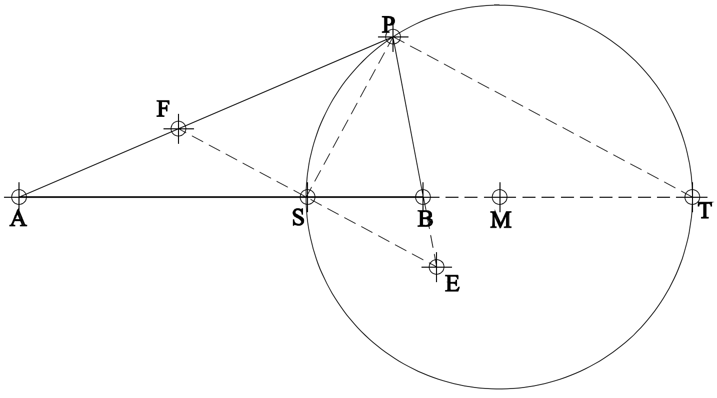
Da wir aus dem Vorherigen schon wissen, dass der innere und äußere Teilungspunkt bei einem harmonischen Punktquadrupel verhältnisgleiche Abstände zu den Punkten **A** und **B** besitzt liegt es nahe, den "**Kreis des Apollonius**" über dem Durchmesser **ST** zu vermuten.



7. Zeichne eine Strecke **AB** beliebiger Länge (aber bitte nicht zu klein und etwa in die Mitte einer Heftseite, so dass du die Skizze noch konstruktiv ergänzen kannst) und teile diese Strecke innen und außen im Verhältnis 5:2. Ergänze die Figur durch den Kreis $\mathbf{k}\left(M_{ST}\ ;\ r = \frac{1}{2}\cdot\overline{ST}\right)$. Wähle nun einen beliebigen Punkt $\mathbf{P} \in \mathbf{k}$ und miss die Abstände $\overline{\mathbf{PA}}$ und $\overline{\mathbf{PB}}$.
   Überprüfe das Abstandsverhältnis mit dem Taschenrechner. Stimmt die Behauptung des Apollonius ungefähr? - Vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn.

---

8. Die Figur wurde schon durch geeignete Hilfslinien ergänzt. - Begründe die folgenden Beweiselemente und ergänze fehlende Beweisschritte:



Vor.: $\overline{AS} : \overline{SB} = \overline{AT} : \overline{TB}$
und $FE \parallel PT$

Beh.: $\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AS} : \overline{SB}$

Bew.: $\overline{AS} : \overline{AT} = \overline{SF} : \overline{PT}$

$\overline{SB} : \overline{BT} = \overline{SE} : \overline{PT}$

Damit: $\overline{FS} : \overline{PT} = \overline{SE} : \overline{PT}$ (Voraussetzung verwendet) $\Rightarrow \overline{FS} = \overline{SE}$

Folglich liegt SP auf der Mittelsenkrechten $\mathbf{m_{EF}}$ und gleichzeitig auf der Winkelhalbierenden des Winkels $\sphericalangle$FPB im Dreieck ΔABP. - Da eine Winkelhalbierende die Gegenseite (**AB**) im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, gilt:

$$\boxed{\overline{AP} : \overline{PB} = \overline{AS} : \overline{SB}}$$

Beweisskizze zu 3.:

Wegen $\frac{\overline{AC}}{\overline{CB}} = \frac{m}{n}$ setzt man $\overline{AC} := m$ und $\overline{CB} := n$ (Längeneinheiten). Für $\overline{BD}$ setzt man x.

Weil auch $\frac{\overline{AD}}{\overline{DB}} = \frac{m}{n} = \frac{m+n+x}{x}$ ist, muss gelten: $x = \frac{m+n}{m-n} \cdot n$.

Damit gilt:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{\overline{CA}}{\overline{AD}} &= \frac{m}{m+n+x} = ... = \frac{m-n}{m+n} \\ \frac{\overline{CB}}{\overline{BD}} &= \frac{n}{x} = \frac{m-n}{m+n} \end{aligned}}.$$