

- Einstieg: über a) Populationsprobleme, z.B. Population eines Hühnerstalls: Belegung zum Zeitpunkt $t = 0$: 2000; in der ersten Woche gehen 15 Hühner ein; wann wird die Wirtschaftlichkeitsgrenze von 1600 erreicht? - Kaninchenvermehrung (Bakterien).
 b) Abnahme der Temperatur einer Bierflasche im Kühlschrank - Zerfallsprozesse.

Forderungen:

$N(t)$ sei eine Menge von Individuen (a)
 ($\vartheta(t)$ sei die Temperatur der Flasche (b))

Ihre Anzahl nimmt:

- (1) In gleichen Zeitabständen ($[0; t]$; $[h; h+t]$)
 (2) um den gleichen Prozentsatz zu oder ab!

Voraussetzungen, Idealisierungen diskutieren

Mathematisierung:

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \frac{N(h+t)}{N(h)} \iff \frac{N(t)}{N(0)} = \frac{N(h+t)}{N(h)} \cdot \frac{N(0)}{N(0)}$$

selbstverständlich: $N(0) \neq 0$

$$\implies \frac{N(t)}{N(0)} \cdot \frac{N(h)}{N(0)} = \frac{N(h+t)}{N(0)} \iff \left(E(x) := \frac{N(x)}{N(0)} \right)$$

Funktionalgleichung: $E(t) \cdot E(h) = E(h+t)$

Entwicklung der Funktionalgleichung:

$$D_{E, N} = \mathbb{Q}$$

Die Beschränkung der Definitionsmenge auf \mathbb{Q} ist zunächst nicht motivierbar (erst bei (6) zu sehen); deswegen evtl. ohne Problematisierung: \mathbb{R} .

(1) $\bigwedge_{t \in \mathbb{R}} E(t) \neq 0$, ansonsten Nullfunktion!

Annahme: $\bigvee_{t_0 \in \mathbb{R}} E(t_0) = 0 \implies$

$$\bigwedge_{t \in \mathbb{R}} \bigvee_{r \in \mathbb{R}} t = r + t_0 \implies \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} E(t) = E(r) \cdot E(t_0) = 0$$

(2) $E(t) = E(0+t) = E(0) \cdot E(t) \implies E(0) = 1$

(3) $E(0) = E(-t+t) = E(-t) \cdot E(t) = 1 \implies E(-t) = \frac{1}{E(t)}$

(4) $E(t) = E\left(\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\right) = \left(E\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 > 0 \implies \bigwedge_{t \in \mathbb{R}} E(t) \in \mathbb{R}^+$

(5) $E(2 \cdot t) = (E(t))^2 \implies E(n \cdot t) = (E(t))^n$ (Induktion!)

(6) Sei $t = \frac{m}{n} > 0$; $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$E(n \cdot t) = (E(t))^n = E(m \cdot 1) = (E(1))^m$$

$$\implies E(t) = (E(1))^{\frac{m}{n}} = a^t \quad ; \quad a := E(1)$$

Zusammen mit (3): $t \in \mathbb{Q}$

Funktionsgleichung:

$$\frac{N(t)}{N(0)} = a^t \iff \boxed{N(t) = N(0) \cdot a^t}$$

Hier sollte zunächst, ohne weitere Mathematisierung, die Diskussion einiger Beispiele folgen; dabei wird $E(1) = a$ durch die verschiedenen Probleme mehrfach berechnet: $a < 1$; $a > 1$; $a = 1$. (Selbstverständlich: $a > 0$!!)

Zur Erklärung von $D_{N,E} = \mathbb{R}$ benötigt man die Monotonie; das Folgende kann später (Vorteil: mit der Differenzierbarkeit [$\exp_a'(x) > 0$ ($\exp_a'(x) < 0$); \exp_a stetig, weil differenzierbar] sehr viel leichter!), im Grundkurs evtl. überhaupt nicht erfolgen.

Monotonie von \exp_a :

$$\exp_a : \begin{array}{l} \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow y \mid y = \exp_a(x) = a^x \end{array}$$

ist für $a > 1$ streng monoton wachsend (ist für $a < 1$ streng monoton fallend).

Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x_1 < x_2$ und $a > 1 \Rightarrow a^{x_2-x_1} > 1^{x_2-x_1}$ wegen:

Beh.: $\bigwedge_{\substack{t \in \mathbb{Q}^+ \\ a > 1}} a^t > 1$

Bew.: Schrittweise über :

- (1) $t \in \mathbb{N}$
- (2) $t = \frac{1}{q} ; q \in \mathbb{N}$
- (3) $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^+$

Die Notwendigkeit des Beweises dieser elementaren Eigenschaft wird von Schülern schwerlich eingesehen. Sie wissen diese Eigenschaft aus der Mittelstufe (10.Klasse), wo sie auch nicht bewiesen wird.

$$\Rightarrow a^{x_2-x_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \iff a^{x_2} > a^{x_1}$$

(Entsprechend für $a < 1$!)

Erklärung von $N(t)$
für $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist t eine Intervallschachtelung: $I_1 = [u_1 ; o_1]$,

$I_2 = [u_2 ; o_2]$, ... , $I_n = [u_n ; o_n]$, mit:

- (1) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} u_n \leq o_n ; \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} t \in I_n$
- (2) $\bigwedge_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} \geq u_n ; \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} o_{n+1} \leq o_n$
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (o_n - u_n) = 0$

Sei $a > 1$; dann ist die Intervallschachtelung (für $a < 1$ entsprechend):

$$I_1^a := [a^{u_1}; a^{o_1}], \quad I_2^a := [a^{u_2}; a^{o_2}], \quad \dots, \quad I_n^a := [a^{u_n}; a^{o_n}] \text{ gleich } a^t.$$

Wegen der strengen Monotonie gilt:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^{u_n} \leq a^{o_n} \quad ; \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^t \in I_n^a \\ (2) \quad & \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^{u_{n+1}} \geq a^{u_n} \quad ; \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^{o_{n+1}} \leq a^{o_n} \\ (3) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{o_n} - a^{u_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} [a^{u_n} \cdot (a^{o_n - u_n} - 1)] \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{u_n} \cdot (a^0 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Hier wird natürlich etwas "gepfuscht", weil man die Stetigkeit von \exp_a benutzt, über die noch nichts gesagt wurde. Deshalb ist es sicher sauberer und eleganter, zunächst die Differenzierbarkeit zu behandeln, hat dann aber \exp_a für irrationale Zahlen nicht erklärt.

Willkürliche Auswahl einer Basis:

- a) Jeder Funktionswert einer Exponentialfunktion läßt sich bezüglich einer ausgezeichneten (willkürlich!) Basis darstellen!

Wähle Basis $z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\Rightarrow a^t = (z^y)^t \Rightarrow a = z^y \Rightarrow y = \log_z(a)$$

$$\Rightarrow a^t = z^{\log_z(a) \cdot t}$$

Beispiel: $8 = 2^3 = 10^{\log_{10}(2) \cdot 3}$

- b) Man wählt **die** Basis der Exponentialfunktion als ausgezeichnete Basis, die an der Stelle 0 nicht nur den Funktionswert 1, sondern auch noch die Steigung 1 hat. Diese Basis, deren Existenz durch graphische Anschauung zunächst gesichert erscheint, heißt **e**.

Vorteil:

$$\begin{aligned} \exp_e'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp_e(x_0 + h) - \exp_e(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = e^{x_0} \end{aligned}$$

D.h.: Die Exponentialfunktion, die an der Stelle 0 die Steigung 1 hat, gibt durch ihre Funktionswerte zugleich ihr jeweiliges lokales Wachstum an (Hinweis: Differentialgleichung: $y' = y$)

Bestimmung von e:

Ist die Steigung an der Stelle 0 gleich 1, so ist für diese Exponentialfunktion die Gerade g mit $g(x) = x+1$ Tangente. Alle Exponentialfunktionen haben mit dieser Geraden den Punkt $(0 | 1)$ gemeinsam. Die Gerade ist Sekante durch:

$$\begin{aligned} (1 | 2) : a^1 &= 2 && \text{für die Basis} && a = 2 \\ \left(\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\right) : a^{\frac{1}{2}} &= \frac{3}{2} && \text{für die Basis} && a = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ \left(\frac{1}{4} \mid \frac{5}{4}\right) : a^{\frac{1}{4}} &= \frac{5}{4} && \text{für die Basis} && a = \left(\frac{5}{4}\right)^4 \\ \left(\frac{1}{n} \mid \frac{n+1}{n}\right) : a^{\frac{1}{n}} &= \frac{n+1}{n} && \text{für die Basis} && a = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Existenz von e:

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} := \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\} \quad \text{und} \quad \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} := \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \right\}$$

bilden die linken und rechten Grenzen einer Intervallschachtelung.

Benötigt wird die *Bernoullische Ungleichung*:

$$(1 + x)^n > 1 + n \cdot x, \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}; x > -1; x \neq 0.$$

1) Trivialerweise gilt für alle $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n < b_n$

2) $a_n > a_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} \\ &= \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} > \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1 \end{aligned}$$

3) $b_n < b_{n-1}$:

$$\begin{aligned} \frac{b_{n-1}}{b_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1 + \frac{1}{n-1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1 \end{aligned}$$

4) Grenzwert der Intervalllänge:

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \leq b_1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = b_1 \cdot 0 = 0$$

Ableitung von \exp_a :

$$\begin{aligned} \exp_a'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp_a(x_0 + h) - \exp_a(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{\log_e(a) \cdot h} - e^{\log_e(a) \cdot 0}}{h} \\ &= a^{x_0} \cdot \log_e(a) \cdot 1 \quad (\text{ Kettenregel }) \end{aligned}$$

oder:

$$\exp_a'(x_0) = \exp_e'(\log_e(a) \cdot x_0) = \log_e(a) \cdot \exp_e(\log_e(a) \cdot x_0) = \log_e(a) \cdot \exp_a(x_0)$$

Schreibweise: $\log_e = \ln$

Das obige bedeutet: Die Exponentialfunktionen haben an der Stelle 0 die Steigung, die der natürliche Logarithmus der Basis angibt.

$\Rightarrow \exp_a$ ist Lösung der Differentialgleichung $y' = k \cdot y$ mit $k = \ln(a)$; $a = e^k$

Das lokale Wachstum ist proportional zum Funktionswert!

Zusammenhang Funktionalgleichung - Differentialgleichung:

a) Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar mit: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= f(x_0) \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f(x_0) \cdot f'(x_0) \\ \Rightarrow \bigwedge_{x_0 \in \mathbb{R}} f'(x_0) &= f'(0) \cdot f(x_0) \Rightarrow f' = k \cdot f \end{aligned}$$

b) Es gelte: $f' = k \cdot f$ und es sei $x_1 + x_2 = a$. [$x_1 = a - x_2$; $x_2 = a - x_1$]

Betrachte die "Hilfsfunktion H_a " mit

$$H_a(x_1) = f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1) \cdot f(a - x_1)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow H_a'(x_1) &= f'(x_1) \cdot f(a - x_1) - f'(a - x_1) \cdot f(x_1) \\ &= k \cdot f(x_1) \cdot f(x_2) - k \cdot f(x_2) \cdot f(x_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H_a(x_1) = \text{konstant} = H_a(0) = f(0) \cdot f(a)$$

$$\Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = f(0) \cdot f(a) = f(0) \cdot f(x_1 + x_2)$$

Also ist die Bedingung für die Funktionalgleichung aus der Differentialgleichung erfüllt: $f(0) = 1$ ($f(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$)

Umkehrfunktionen: \exp_a ist für $a > 0$ ($a \neq 1$) streng monoton. Damit existieren Umkehrfunktionen.

$$\begin{array}{ll} \exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+ & \log_a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto a^x & x \mapsto \log_a(x) \end{array}$$

Es gilt:

$$\begin{array}{l} y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y) \\ x = \log_a(\exp_a(x)) \quad ; \quad x = \exp_a(\log_a(x)) \\ x \in \mathbb{R} \qquad \qquad \qquad x \in \mathbb{R}^+ \end{array}$$

Eigenschaften:

$$\begin{array}{l} y_1 = \exp_a(x_1) \quad ; \quad y_2 = \exp_a(x_2) \\ \implies y_1 \cdot y_2 = \exp_a(x_1 + x_2) \\ \implies \log_a(y_1 \cdot y_2) = x_1 + x_2 = \log_a(y_1) + \log_a(y_2) \\ \\ y^n := \exp_a(n \cdot x) \\ \implies \log_a(y^n) = n \cdot \log_a(y) \\ \\ \frac{y_1}{y_2} = \exp_a(x_1 - x_2) = \frac{\exp_a(x_1)}{\exp_a(x_2)} \\ \implies \log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = x_1 - x_2 = \log_a(y_1) - \log_a(y_2) \end{array}$$

Ableitung von \log_a :

1) $a = e$; Nach Kettenregel gilt:

$$\begin{array}{l} (f^{-1} \circ f(x))' = f^{-1}'(y) \cdot f'(x) = 1 \\ \implies f^{-1}'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \\ \implies \ln'(y) = \frac{1}{\exp_e'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y} \end{array}$$

2) $\log_a'(y) = \frac{1}{\exp_a'(x)} = \frac{1}{\ln(a) \cdot a^x} = \frac{1}{\ln(a) \cdot y}$

Da $y \in \mathbb{R}^+$ gilt auch: $\ln'(y) = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^+$. Damit ist die Funktion \ln streng monoton wachsend und stetig. - \log_a ist für $a < 1$ streng monoton fallend, weil $\ln(a) < 0$ ist.

Wegen: $\ln'(-y) = \frac{1}{-y} \cdot (-1)$ gehört auch "ln(-x)" zur Menge der Stamm-

funktionen zu " $\frac{1}{x}$ ", deshalb gilt: $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(|x|) + C$

Beachte: $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot dx$; $\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x} \cdot dx$ existieren, aber $\int_{-1}^2 \frac{1}{x} \cdot dx$ existiert nicht !