Wachstums- und Abnahme- (Zerfalls-) Prozesse

Einstieg: über

a) Populationsprobleme, z.B. Population eines Hühnerstalls: Belegung zum Zeitpunkt t = 0: 2000; in der ersten Woche gehen 15 Hühner ein; wann wird die Wirtschaftlichkeitsgrenze von 1600 erreicht? - Kaninchenvermehrung (Bakterien).

b) Abnahme der Temperatur einer Bierflasche im Kühlschrank - Zerfallsprozesse.

Forderungen:

$N(t)$ sei eine Menge von Individuen (a)
($\vartheta(t)$ sei die Temperatur der Flasche (b))

Ihre Anzahl nimmt: (1) In gleichen Zeitabständen ([0 ; t] ; [h ; h+t]) (2) um den gleichen Prozentsatz zu oder ab !

Voraussetzungen, Idealisierungen diskutieren

Mathematisierung:

$$\frac{N(t)}{N(0)} = \frac{N(h+t)}{N(h)} \Leftrightarrow \frac{N(t)}{N(0)} = \frac{N(h+t)}{N(h)} \cdot \frac{N(0)}{N(0)}$$

selbstverständlich: $N(0) \neq 0$

$$\Rightarrow \frac{N(t)}{N(0)} \cdot \frac{N(h)}{N(0)} = \frac{N(h+t)}{N(0)} \Leftrightarrow \left(E(x) := \frac{N(x)}{N(0)} \right)$$

Funktionalgleichung: **$E(t) \cdot E(h) = E(h+t)$**

Entwicklung der Funktionalgleichung:

$D_{E,N} = \mathbb{Q}$

Die Beschränkung der Definitionsmenge auf $\mathbb{Q}$ ist zunächst nicht motivierbar (erst bei (6) zu sehen); deswegen evtl. ohne Problematisierung: $\mathbb{R}$.

(1) $\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} E(t) \neq 0$, ansonsten Nullfunktion!

Annahme: $\bigvee_{t_0\in\mathbb{R}} E(t_0) = 0 \quad \Rightarrow$

$\bigwedge_{t\in\mathbb{R}} \bigvee_{r\in\mathbb{R}} t = r + t_0 \quad \Rightarrow \bigwedge_{t\in\mathbb{R}} E(t) = E(r) \cdot E(t_0) = 0$

(2) $E(t) = E(0+t) = E(0) \cdot E(t) \quad \Rightarrow E(0) = 1$

(3) $E(0) = E(-t+t) = E(-t) \cdot E(t) = 1 \quad \Rightarrow E(-t) = \dfrac{1}{E(t)}$

(4) $E(t) = E\left(\frac{t}{2}+\frac{t}{2}\right) = \left(E\left(\frac{t}{2}\right)\right)^2 > 0 \quad \Rightarrow \bigwedge_{t\in\mathbb{R}} E(t) \in \mathbb{R}^+$

(5) $E(2\cdot t) = (E(t))^2 \quad \Rightarrow E(n\cdot t) = (E(t))^n$ (Induktion!)

(6) Sei $t = \frac{m}{n} > 0 \quad ; \quad n,m \in \mathbb{N}^*$

$E(n\cdot t) = (E(t))^n = E(m\cdot 1) = (E(1))^m$

$\Rightarrow E(t) = (E(1))^{\frac{m}{n}} = a^t \quad ; \quad a := E(1)$

Zusammen mit (3): $t \in \mathbb{Q}$

Funktionsgleichung:

$$\frac{N(t)}{N(0)} = a^t \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\mathbf{N(t) = N(0) \cdot a^t}}$$

Hier sollte zunächst, ohne weitere Mathematisierung, die Diskussion einiger Beispiele folgen; dabei wird E(1) = a durch die verschiedenen Probleme mehrfach berechnet: a < 1; a > 1; a = 1. (Selbstverständlich: a > 0 !!)

Zur Erklärung von $D_{N,E} = \mathbb{R}$ benötigt man die Monotonie; das Folgende kann später (Vorteil: mit der Differenzierbarkeit [$\exp_a'(x) > 0$ ($\exp_a'(x) < 0$) ; $\exp_a$ stetig, weil differenzierbar] sehr viel leichter!) , im Grundkurs evtl. überhaupt nicht erfolgen.

Monotonie von $\exp_a$:

$$\exp_a : \quad \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y \mid y = \exp_a(x) = a^x$$

ist für a > 1 streng monoton wachsend (ist für a < 1 streng monoton fallend).

Sei $x_1, x_2 \in \mathbb{Q}$ mit $x_1 < x_2$ und $a > 1 \Rightarrow a^{x_2 - x_1} > 1^{x_2 - x_1}$ wegen:

Beh.: $\bigwedge\limits_{\substack{t \in Q^+ \\ a > 1}} a^t > 1$

Bew.: Schrittweise über :

(1) $t \in \mathbb{N}$

(2) $t = \frac{1}{q}$; $q \in \mathbb{N}$

(3) $t = \frac{p}{q} \in Q^+$

Die Notwendigkeit des Beweises dieser elementaren Eigenschaft wird von Schülern schwerlich eingesehen. Sie wissen diese Eigenschaft aus der Mittelstufe (10.Klasse), wo sie auch nicht bewiesen wird.

$$\Rightarrow \quad a^{x_2 - x_1} = \frac{a^{x_2}}{a^{x_1}} > 1 \quad \Leftrightarrow \quad a^{x_2} > a^{x_1}$$

(Entsprechend für a < 1 !)

Erklärung von N(t) für $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$:

Sei $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, dann ist t eine Intervallschachtelung: $I_1 = [\, u_1 ; o_1 \,]$,

$I_2 = [\, u_2 ; o_2 \,]$, ... , $I_n = [\, u_n ; o_n \,]$, mit:

(1) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} u_n \le o_n$; $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} t \in I_n$

(2) $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} u_{n+1} \ge u_n$; $\bigwedge\limits_{n \in \mathbb{N}} o_{n+1} \le o_n$

(3) $\lim\limits_{n \to \infty} (o_n - u_n) = 0$

Sei a > 1; dann ist die Intervallschachtelung (für a < 1 entsprechend):

$I_1^a := \left[a^{u_1}; a^{o_1}\right], \quad I_2^a := \left[a^{u_2}; a^{o_2}\right], \quad ..... \quad , \quad I_n^a := \left[a^{u_n}; a^{o_n}\right]$ gleich a^t.

Wegen der strengen Monotonie gilt:

$$(1) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^{u_n} \leq a^{o_n} \quad ; \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^t \in I_n^a$$

$$(2) \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^{u_{n+1}} \geq a^{u_n} \quad ; \quad \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} a^{o_{n+1}} \leq a^{o_n}$$

$$(3) \quad \lim_{n \to \infty} (a^{o_n} - a^{u_n}) = \lim_{n \to \infty} \left[a^{u_n} \cdot \left(a^{o_n - u_n} - 1\right) \right]$$

$$= \lim_{n \to \infty} a^{u_n} \cdot \left(a^0 - 1\right) = 0$$

Hier wird natürlich etwas "gepfuscht", weil man die Stetigkeit von exp_a benutzt, über die noch nichts gesagt wurde. Deshalb ist es sicher sauberer und eleganter, zunächst die Differenzierbarkeit zu behandeln, hat dann aber exp_a für irrationale Zahlen nicht erklärt.

Willkürliche Auswahl **einer** Basis:

a) Jeder Funktionswert einer Exponentialfunktion läßt sich bezüglich einer ausgezeichneten (willkürlich!) Basis darstellen!

Wähle Basis $z \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$

$$\Rightarrow \quad a^t = \left(z^y\right)^t \quad \Rightarrow \quad a = z^y \quad \Rightarrow \quad y = \log_z(a)$$

$$\Rightarrow \quad a^t = z^{\log_z(a) \cdot t}$$

Beispiel: $8 = 2^3 = 10^{\log_{10}(2) \cdot 3}$

b) Man wählt **die** Basis der Exponentialfunktion als ausgezeichnete Basis, die an der Stelle 0 nicht nur den Funktionswert 1, sondern auch noch die Steigung 1 hat. Diese Basis, deren Existenz durch graphische Anschauung zunächst gesichert erscheint, heißt **e**.

Vorteil:

$$exp_e'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{exp_e(x_0 + h) - exp_e(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0 + h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{e^{0+h} - e^0}{h} = e^{x_0}$$

D.h..: Die Exponentialfunktion, die an der Stelle 0 die Steigung 1 hat, gibt durch ihre Funktionswerte zugleich ihr jeweiliges lokales Wachstum an (*Hinweis: Differentialgleichung: y' = y*)

<u>Bestimmung von **e**:</u>

Ist die Steigung an der Stelle 0 gleich 1, so ist für diese Exponentialfunktion die Gerade g mit g(x) = x+1 Tangente. Alle Exponentialfunktionen haben mit dieser Geraden den Punkt (0 | 1) gemeinsam. Die Gerade ist Sekante durch:

$(1 \mid 2)$:	$a^1 = 2$	für die Basis	$a = 2$
$\left(\frac{1}{2} \mid \frac{3}{2}\right)$:	$a^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}$	für die Basis	$a = \left(\frac{3}{2}\right)^2$
$\left(\frac{1}{4} \mid \frac{5}{4}\right)$:	$a^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}$	für die Basis	$a = \left(\frac{5}{4}\right)^4$
$\left(\frac{1}{n} \mid \frac{n+1}{n}\right)$:	$a^{\frac{1}{n}} = \frac{n+1}{n}$	für die Basis	$a = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{e} := \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

<u>Existenz von **e**:</u>

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\} \quad \text{und} \quad \{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

bilden die linken und rechten Grenzen einer Intervallschachtelung.

Benötigt wird die *Bernoullische Ungleichung*:

$$(1+x)^n > 1 + n\cdot x\,, \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}\,;\ x > -1\,;\ x \neq 0\,.$$

1) Trivialerweise gilt für alle $n\in\mathbb{N}^*$: $a_n < b_n$

2) $a_n > a_{n-1}$:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1}$$

$$= \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} > \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

3) $b_n < b_{n-1}$:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)}$$

$$= \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

$$= \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} > \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

4) Grenzwert der Intervalllänge:

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\left(b_n - a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \le b_1 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = b_1 \cdot 0 = 0$$

Ableitung von $\exp_a$:

$$\exp_a'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp_a(x_0+h) - \exp_a(x_0)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} = a^{x_0} \cdot \lim_{h\to 0}\frac{e^{\log_e(a)\cdot h} - e^{\log_e(a)\cdot 0}}{h}$$
$$= a^{x_0} \cdot \log_e(a) \cdot 1 \qquad (\text{ Kettenregel })$$

oder:

$$\exp_a'(x_0) = \exp_e'\left(\log_e(a)\cdot x_0\right) = \log_e(a) \cdot \exp_e\left(\log_e(a)\cdot x_0\right) = \log_e(a) \cdot \exp_a(x_0)$$

Schreibweise: $\log_e = \ln$

Das obige bedeutet: Die Exponentialfunktionen haben an der Stelle 0 die Steigung, die der natürliche Logarithmus der Basis angibt.

$\Rightarrow$ $\exp_a$ ist Lösung der Differentialgleichung $y' = k \cdot y$ mit $k = \ln(a)$; $a = e^k$

Das lokale Wachstum ist proportional zum Funktionswert!

Zusammenhang Funktionalgleichung - Differentialgleichung:

a) Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) \cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = f(x_0) \cdot f'(x_0)$$
$$\Rightarrow \bigwedge_{x_0\in\mathbb{R}} f'(x_0) = f'(0) \cdot f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f' = k \cdot f$$

b) Es gelte: $f' = k \cdot f$ und es sei $x_1 + x_2 = a$. [$x_1 = a - x_2$; $x_2 = a - x_1$]

Betrachte die "Hilfsfunktion H_a" mit
$H_a(x_1) = f(x_1) \cdot f(x_2) = f(x_1) \cdot f(a - x_1)$

$$\Rightarrow H_a'(x_1) = f'(x_1) \cdot f(a-x_1) - f'(a-x_1) \cdot f(x_1)$$
$$= k \cdot f(x_1) \cdot f(x_2) - k \cdot f(x_2) \cdot f(x_1) = 0$$
$$\Rightarrow H_a(x_1) = \text{konstant} = H_a(0) = f(0) \cdot f(a)$$
$$\Rightarrow f(x_1) \cdot f(x_2) = f(0) \cdot f(a) = f(0) \cdot f(x_1+x_2)$$

Also ist die Bedingung für die Funktionalgleichung aus der Differentialgleichung erfüllt: $\boxed{f(0) = 1}$ ($f(0) = 0 \Rightarrow f \equiv 0$)

<u>Umkehrfunktionen:</u> $\exp_a$ ist für a > 0 (a ≠ 1) streng monoton. Damit existieren Umkehrfunktionen.

$$\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \qquad\qquad \log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto a^x \qquad\qquad x \mapsto \log_a(x)$$

Es gilt:

$$y = \exp_a(x) \iff x = \log_a(y)$$
$$x = \log_a(\exp_a(x)) \quad ; \quad x = \exp_a(\log_a(x))$$
$$x \in \mathbb{R} \qquad\qquad x \in \mathbb{R}^+$$

<u>Eigenschaften:</u>

$$y_1 = \exp_a(x_1) \quad ; \quad y_2 = \exp_a(x_2)$$
$$\Rightarrow y_1 \cdot y_2 = \exp_a(x_1 + x_2)$$
$$\Rightarrow \log_a(y_1 \cdot y_2) = x_1 + x_2 = \log_a(y_1) + \log_a(y_2)$$

$$y^n := \exp_a(n \cdot x)$$
$$\Rightarrow \log_a(y^n) = n \cdot \log_a(y)$$

$$\frac{y_1}{y_2} = \exp_a(x_1 - x_2) = \frac{\exp_a(x_1)}{\exp_a(x_2)}$$
$$\Rightarrow \log_a\left(\frac{y_1}{y_2}\right) = x_1 - x_2 = \log_a(y_1) - \log_a(y_2)$$

<u>Ableitung von $\log_a$:</u> 1) a = e ; Nach Kettenregel gilt:

$$\left(f^{-1} \circ f(x)\right)' = f^{-1'}(y) \cdot f'(x) = 1$$
$$\Rightarrow f^{-1'}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$
$$\Rightarrow \ln'(y) = \frac{1}{\exp_e'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

2)
$$\log_a'(y) = \frac{1}{\exp_a'(x)} = \frac{1}{\ln(a) \cdot a^x} = \frac{1}{\ln(a) \cdot y}$$

Da $y \in \mathbb{R}^+$ gilt auch: $\ln'(y) = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^+$. Damit ist die Funktion ln streng monoton wachsend und stetig. - $\log_a$ ist für a < 1 streng monoton fallend, weil ln(a) < 0 ist.
Wegen: $\ln'(-y) = \frac{1}{-y} \cdot (-1)$ gehört auch "ln(-x)" zur Menge der Stammfunktionen zu "$\frac{1}{x}$", deshalb gilt: $\int \frac{1}{x} \cdot dx = \ln(|x|) + C$

<u>Beachte:</u> $\int_1^2 \frac{1}{x} \cdot dx$; $\int_{-4}^{-2} \frac{1}{x} \cdot dx$ existieren, aber $\int_{-1}^{2} \frac{1}{x} \cdot dx$ existiert nicht !