Karl Marx

Mathematische Manuskripte

I

ÜBER DEN BEGRIFF DER ABGELEITETEN FUNKTION

I

Wächst die unabhängige Variable x zu x_1, so die abhängige Variable y zu y_1.

Hier sub I) der ganz einfache Fall betrachtet, wo x nur in der ersten Potenz erscheint.

1) $y = ax$; wenn x zu x_1 wächst,

$$y_1 = ax_1 \quad \text{und} \quad y_1 - y = a(x_1 - x).$$

Fände jetzt die *Differentialoperation* statt, d. h. liessen wir x_1 bis auf x abnehmen, so

$$x_1 = x; \quad x_1 - x = 0,$$

also

$$a(x_1 - x) = a \cdot 0 = 0.$$

Ferner, da y bloss zu y_1 ward, weil x zu x_1, würde nun ebenfalls

$$y_1 = y; \quad y_1 - y = 0.$$

Also

$$y_1 - y = a(x_1 - x)$$

verwandelt in $0 = 0$.

Erst die Differentiation setzen und sie dann wieder aufheben führt also wörtlich zu *Nichts*. Die ganze Schwierigkeit im Verständnis der Differentialoperation (wie in dem der *Negation der Negation* überhaupt) liegt eben darin, zu sehn, *wie* sie sich von solch einfacher
1 Prozedur unterscheidet und deshalb zu wirklichen Resultaten führt.

Quelle: Scriptor Verlag GmbH, Kronberg Ts., 1974

Dividieren wir $a\,(x_1 - x)$ und entsprechend auch die linke Seite der Gleichung, durch den Faktor $x_1 - x$, so erhalten

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = a.$$

Da y die *abhängige Variable*, kann es überhaupt keine unabhängige Bewegung vollziehen [hier, weil $y = ax$], y_1 kann daher nicht $= y$ werden, also auch nicht $y_1 - y = 0$, ohne dass vorher $x_1 = x$ geworden.

Andrerseits haben wir gesehn, dass x_1 nicht $= x$ werden konnte in der Funktion $a\,(x_1 - x)$, ohne letztre zu 0 zu machen. Der Faktor $x_1 - x$ war daher *notwendig* eine *endliche Differenz* zur Zeit, wo beide Seiten der Gleichung durch ihn dividiert worden. Im Moment der Herstellung des Verhältnisses

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

ist $x_1 - x$ daher stets eine endliche Differenz; folglich ist

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x}$$

ein *Verhältnis endlicher Differenzen*, und demgemäss

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Also:

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a,$$

wo die Konstante a als *Grenzwert* des Verhältnisses der endlichen
2 Differenzen der beiden Variablen figuriert.

Da a konstant, kann keine Veränderung mit ihm vorgehn, also auch nicht mit der auf es reduzierten *rechten Seite* der Gleichung. Unter solchen Umständen verläuft sich der *Differentialprozess* auf der linken Seite

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

und dies ist eine Eigentümlichkeit solch einfacher Funktionen wie ax.

Nimmt im Nenner des Verhältnisses x_1 ab, so nähert es sich x; die Grenze seiner Abnahme ist erreicht, sobald es zu x wird. Hiermit ist die Differenz $x_1 - x_1 = x - x = 0$ gesetzt und daher auch $y_1 - y = y - y = 0$. Wir erhalten so

$$\frac{0}{0} = a.$$

Da im Ausdruck $\frac{0}{0}$ jede Spur seines Ursprungs und seiner Bedeutung erlischt, ersetzen wir ihn durch $\frac{dy}{dx}$, wo die endlichen Differenzen $x_1 - x$ oder Δx und $y_1 - y$ oder Δy als *aufgehobne* oder *verschwundene* Differenzen symbolisiert erscheinen oder $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verwandelt in $\frac{dy}{dx}$. Also

$$\frac{dy}{dx} = a.$$

Der von einigen rationalisierenden Mathematikern festgehaltne Trost, quantitativ seien dy und dx in der Tat nur unendlich klein, [ihr Verhältnis] nur annähernd $\frac{0}{0}$, ist Chimere, wie es sich sub II)
3 noch handgreiflicher zeigen wird.

Noch zu erwähnende Eigentümlichkeit des betrachteten Falls ist, dass $\frac{\Delta y}{\Delta x} = a$ und ebenso $\frac{dy}{dx} = a$, der Grenzwert [des Verhältnisses] der endlichen Differenzen daher zugleich auch der Grenzwert [des Verhältnisses] der Differentialen, ist.

2) Ein zweites Beispiel desselben Falls ist

$$\begin{matrix} y = x \\ y_1 = x_1 \end{matrix}; \quad y_1 - y = x_1 - x;$$

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1; \qquad \frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 1.$$

II

Da $y = f(x)$, die Funktion x, aber in ihrem *entwickelten algebraischen Ausdruck*[6] sich auf der rechten Seite der Gleichung befindet, nennen wir diesen Ausdruck die *Originalfunktion von* x, seine erste durch Differentiation erhaltene Modifikation die *vorläufig «Abgeleitete» Funktion* x und seine schliesslich durch den *Differentialprozess* erhaltne Gestalt die *«Abgeleitete» Funktion von* x.

1) $y = ax^3 + bx^2 + cx - e$.

Wächst x zu x_1, so

$$y_1 = ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 - e,$$

$$y_1 - y = a\,(x_1^3 - x^3) + b\,(x_1^2 - x^2) + c\,(x_1 - x) =$$
$$= a\,(x_1 - x)\,(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b\,(x_1 - x)\,(x_1 + x) + c\,(x_1 - x).$$

Daher

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a\,(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b\,(x_1 + x) + c.$$

Die *vorläufig «Abgeleitete»*

$$a\,(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b\,(x_1 + x) + c$$

ist hier der *Grenzwert* des *Verhältnisses* der endlichen Differenzen, d. h., wie klein auch immer diese Differenzen genommen werden mögen, der Wert von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist gegeben in jener «Abgeleiteten». Aber er fällt hier nicht wie sub I) zusammen mit dem Grenzwert des Verhältnisses
4 der Differentialen *.

Wenn in der Funktion

$$a\,(x_1^2 + x_1 x + x^2) + b\,(x_1 + x) + c$$

die Variable x_1 abnimmt, bis sie die *Grenze* ihrer Abnahme erreicht hat, d. h. *gleich* x geworden ist, verwandelt sich x_1^2 in x^2, $x_1 x$ in x^2, und $x_1 + x$ in $2x$ und wir erhalten die *«Abgeleitete» Funktion* x:

$$3ax^2 + 2bx + c.$$

Hier zeigt sich schlagend:

Erstens: um die «Abgeleitete» zu erhalten, muss $x_1 = x$ gesetzt werden, also im *strikten mathematischen Sinn* $x_1 - x = 0$, ohne jede Flause von bloss unendlicher Annäherung.

Zweitens: dadurch, dass $x_1 = x$ gesetzt wird, also $x_1 - x = 0$, tritt durchaus nichts Symbolisches in die «Abgeleitete» ein **. Die ursprünglich durch Variation von x eingeführte Grösse x_1 verschwindet nicht, sie wird nur *reduziert* auf ihren minimalen Grenzwert $= x$ und bleibt ein in die Originalfunktion x neu eingeführtes Element, welches durch seine Kombinationen teils mit sich selbst,

* Im Entwurf dieser Arbeit (4146, Pl. 4) folgt:
«Andrerseits geht der Differentialprozess jetzt vor in der vorläufig «Abgeleiteten» Funktion x (rechte Seite), während derselbe Prozess auf [der] linken Seite jene Bewegung notwendig begleitet».— *Red.*

** Im Entwurf lautet der folgende Satz:
«b) Die Findung «der Abgeleiteten» aus der Originalfunktion x verlief so, dass wir erst eine *endliche Differentiation* [das Setzen der endlichen Differenz] vornahmen; diese liefert eine vorläufig «Abgeleitete», welche der *Grenzwert* von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ist. Der Differentialprozess, zu dem wir dann schreiten, *reduziert* diesen *Grenzwert auf seine Minimalgrösse*. Die in der ersten Differentiation eingeführte Grösse x_1 verschwindet nicht...».— *Red.*

teils mit dem x der Originalfunktion die schliessliche «Abgeleitete» liefert, d. h. die auf ihre *Minimalgrösse reduzierte vorläufige «Abgeleitete»*.

Die Reduktion von x_1 auf x innerhalb der ersten (vorläufigen) «Abgeleiteten» Funktion verwandelt auf der linken Seite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$, also:

$$\frac{0}{0} \text{ oder } \frac{dy}{dx} = 3ax^2 + 2bx + c,$$

so dass die *Abgeleitete* als *Grenzwert* des Verhältnisses der Differentia-
5 len erscheint.

Das transzendentale oder symbolische Unglück ereignet sich nur auf der linken Seite, hat aber seine Schrecken bereits verloren, da es nun nur als Ausdruck eines Prozesses erscheint, der seinen wirklichen Gehalt bereits auf der rechten Seite der Gleichung be-
6 währt hat.

In der «Abgeleiteten»

$$3ax^2 + 2bx + c$$

existiert die Variable x unter ganz anderen Bedingungen als in der Originalfunktion x (nämlich als in $ax^3 + bx^2 + cx - e$). Sie [diese Abgeleitete] kann also ihrerseits selbst wieder als eine Originalfunktion auftreten und Mutter einer andern «Abgeleiteten» durch erneuten Differentialprozess werden. Dies kann sich so oft wiederholen als die Variable x nicht definitiv aus einer der «Abgeleiteten» entfernt ist, also endlos fortdauern bei Funktionen von x, die nur in endlosen Reihen darstellbar sind, was allzumeist der Fall.

Die Symbole $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$ etc. zeigen nur das Stammregister der «Abgeleiteten» mit Bezug auf die erstgegebne Originalfunktion x an. Sie werden nur mysteriös, sobald man sie als *Ausgangspunkt* der Bewegung behandelt, statt als blosse *Ausdrücke sukzessiv abgeleiteter Funktionen x*. Dann erscheint es allerdings wunderbar, dass ein Verhältnis Verschwundner von neuem potenzierte Grade der Verschwindung durchlaufen soll, während nichts Wunderbares darin ist, dass z. B. $3x^2$ den Differentialprozess durchlaufen kann, so gut wie seine Stammutter x^3. Man hätte ja auch von $3x^2$ als Originalfunktion von x ausgehn
7 können.

Aber *notabene*. Ausgangsstätte des *Differentialprozesses* ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ faktisch nur in Gleichungen wie sub I), wo x nur in der ersten Potenz vorkommt. Dann jedoch, wie sub I) gezeigt, das Resultat:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a = \frac{dy}{dx}.$$

In der Tat ist hier also durch den Differentialprozess, den $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ durchlaufen, *kein neuer Grenzwert* gefunden worden, was nur möglich, solange die vorläufig «Abgeleitete» die Variable x einschliesst, solange also $\frac{dy}{dx}$ Symbol eines realen Prozesses bleibt*.

Es hindert dies natürlich in keiner Art, dass im Differentialcalculus die Symbole $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ etc. und deren Kombination auch die rechte Seite der Gleichung bilden. Dann weiss man aber auch, dass solche rein symbolische Gleichungen nur die *Operationen* anzeigen, die nachher auf wirkliche Funktionen von Variablen anzuwenden sind.

2) $y = ax^m$.

Wird x zu x_1, so $y_1 = ax_1^m$ und

$$y_1 - y = a(x_1^m - x^m) =$$
$$= a(x_1 - x)(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \text{etc. bis zum Glied } x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Also

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} = a(x_1^{m-1} + x_1^{m-2}x + x_1^{m-3}x^2 + \ldots + x_1^{m-m}x^{m-1}).$$

Wenden wir nun den Differentialprozess auf diese *«vorläufig Abgeleitete»* an, so dass

$$x_1 = x \text{ oder } x_1 - x = 0$$

wird, so verwandelt sich

$$x_1^{m-1} \text{ in } x^{m-1};$$

$$x_1^{m-2}x \text{ in } x^{m-2}x = x^{m-2+1} = x^{m-1};$$
$$x_1^{m-3}x^2 \text{ in } x^{m-3}x^2 = x^{m-3+2} = x^{m-1}$$

und endlich

$$x_1^{m-m}x^{m-1} \text{ in } x^{m-m}x^{m-1} = x^{0+m-1} = x^{m-1}.$$

* Im Entwurf (Pl.7) lautet dieser Satz:
«Dies kann nur dort resultieren, wo die vorläufig «Abgeleitete» Funktion die Variable x einschliesst, daher auch durch deren Bewegung ein wirklicher' Neuwert gebildet werden kann, daher $\frac{dy}{dx}$ Symbol eines realen Prozesses ist».— *Red.*

Wir erhalten also m. mal die Funktion x^{m-1}, und die «Abgeleitete» ist daher max^{m-1}.

Durch die Gleichsetzung von $x_1 = x$ innerhalb der «vorläufig Abgeleiteten»* wird auf der linken Seite $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ verwandelt in $\frac{0}{0}$ oder $\frac{dy}{dx}$, daher

$$\frac{dy}{dx} = max^{m-1}$$

Sämtliche Operationen des Differentialcalculs könnten in dieser Weise behandelt werden, was aber eine verdammt nutzlose Weitläufigkeit wäre. Doch folgt hier noch ein Beispiel, weil in den bisherigen die Differenz $x_1 - x$ *nur einmal* in der Funktion x vorkam und daher durch die Bildung von

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

aus der rechten Seite verschwand. Dies nicht der Fall im folgenden:

3) $y = a^x$;

wird x zu x_1, so

$$y_1 = a^{x_1}.$$

Daher

$$y_1 - y = a^{x_1} - a^x = a^x(a^{x_1 - x} - 1).$$

[Aber]

$$a^{x_1 - x} = \{1 + (a-1)\}^{x_1 - x},$$

und

$$\{1 + (a-1)\}^{x_1 - x} = 1 + (x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \text{etc.}$$

Daher

$$y_1 - y = a^x(a^{x_1 - x} - 1) = a^x\left\{(x_1 - x)(a-1) + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{(x_1 - x)(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

$$\therefore \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$
$$= a^x\left\{(a-1) + \frac{x_1 - x - 1}{1 \cdot 2}(a-1)^2 + \frac{(x_1 - x - 1)(x_1 - x - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}(a-1)^3 + \text{etc.}\right\}.$$

* D. h. auf der rechten Seite.— *Red.*

Wird nun $x_1 = x$, also $x_1 - x = 0$, so erhalten wir für die *«Abgeleitete»*:

$$a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Also:

$$\frac{dy}{dx} = a^x \left\{(a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \text{etc.}\right\}.$$

Nennen wir die Summe der Konstanten in der Klausel A, so:

$$\frac{dy}{dx} = Aa^x;$$

dies A aber $=$ dem Napierschen Logarithmus der Wurzel a, also: $\frac{dy}{dx}$, oder wenn wir für y seinen Wert setzen: $\frac{da^x}{dx} = \log a \cdot a^x$,

8 und

$$da^x = \log a \cdot a^x\, dx.$$

Nachträglich

Es wurden

1) Fälle betrachtet, wo der Faktor $(x_1 - x)$ nur einmal in [dem Ausdruck], der [zur] *«vorläufig Abgeleiteten»* [führt], i. e. [in] der endlichen Differenzgleichung enthalten ist, daher [wird] durch Division beider Seiten mit $x_1 - x$ gebildet

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \text{ oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[kein Betreten der Differenz $x_1 - x$ enthält], derselbe Faktor also aus der Funktion x eliminiert wird.

2) (Im Beispiel: $d(a^x)$) Fälle, wo Faktoren $(x_1 - x)$ in der Funktion x bleiben nach Bildung von $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

3) Es ist noch zu betrachten der Fall wo Faktor $x_1 - x$ *nicht direkt* aus der ersten Differenzgleichung ([die zu] (der «vorläufig Abgeleiteten») [führt]) zu evolvieren ist.

$$y = \sqrt{a^2 + x^2},$$

$$y_1 = \sqrt{a^2 + x_1^2},$$

$$y_1 - y = \sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2};$$

wir dividieren die Funktion von x, also auch die linke Seite, durch

$x_1 - x$. Dann

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} \left(\text{oder } \frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{\sqrt{a^2 + x_1^2} - \sqrt{a^2 + x^2}}{x_1 - x}.$$

Um die Wurzelgrösse aus Zähler zu entfernen, Zähler und Nenner multipliziert mit $\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}$, und erhalten:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^2 + x_1^2 - (a^2 + x^2)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Aber

$$\frac{x_1^2 - x^2}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)} = \frac{(x_1 - x)(x_1 + x)}{(x_1 - x)\left(\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}\right)}.$$

Also:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x_1 + x}{\sqrt{a^2 + x_1^2} + \sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Wird x_1 nun $= x$, oder $x_1 - x = 0$, so

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Also

$$dy \text{ oder } d\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{x\, dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

9
