Fragt man Menschen mit mathematischer Grundbildung aus allen Erdteilen und Völkern, nach der für sie schönsten mathematischen Beziehung, so wird sicherlich mehrheitlich die folgende Gleichung genannt:

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

Vielleicht können Nichtmathematiker das Wunderbare dieser Gleichung nicht nachvollziehen (genau so wie “Schönheit” ein sehr subjektives Empfinden ist), doch muss wohl auch ein tiefer liegender Kern in dieser Beziehung liegen, wenn diese Gleichung Mathematikern bei der ersten Nachfrage sofort in das Bewusstsein kommt. - Was ist denn das Besondere dieser Beziehung?

1 , **π** , **0** , **i** und **e** - 5 Zahlen, die, jede für sich, eine zentrale Bedeutung in unserem Universum besitzen, sind, so verschieden sie auch sind, über die obige Gleichung miteinander verknüpft.

Unglaublich! - Und man erinnert sich unwillkürlich bei der Bedeutung dieser Zahlen für unser Weltverständnis an den Ausspruch des großen griechischen Philosophen Aristoteles (384 - 322 v. Chr., Lehrer von Alexander dem Großen, Schüler von Platon, dieser wiederum Schüler von Sokrates), auf den Vieles von unserem Staatsverständnis und Weltbild zurückgeht:

“**Die Mathematik ist die Sprache, mit der Gott die Welt erfunden hat**”.

Wir wollen uns zunächst diese 5 Zahlen erst einmal einzeln betrachten und ihre Bedeutung analysieren.

1: Was ist **1**? - Das neutrale Element der Multiplikation, sagen die Mathematiker, denn wenn ich eine Zahl mit **1** multipliziere, dann verändert sie sich nicht: **1** · 4711 = 4711, - und diese Multiplikationsaufgabe funktioniert natürlich mit jeder anderen Zahl als 4711 genau so. Natürlich? - Wie fangen denn kleine Kinder an zu zählen?! - Mit **1** ! - Und was ist 2? - Man muss zu **1** eine **1** dazu zählen: **1** + **1** = 2; wenn man aber 2 kennt, muss man nur wieder **1** dazu zählen und hat dann die 3, und 3 + **1** = 4, 4 + **1** = 5, 5 + **1** = 6, ...! - Ohne die **1** könnten wir nicht zählen und, was für Kinder so natürlich ist, mit der Einzigartigkeit des Individuums (**1**) natürliche Zahlen zu bilden, das hat wissenschaftlich der italienische Mathematiker Guiseppe **Peano** (1858 - 1932) in seinem Axiomensystem für die Menge der natürlichen Zahlen definiert.[1]

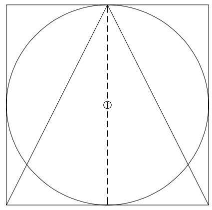
π: Wenn etwas gekrümmt ist, vielleicht sogar ideal gekrümmt wie ein Kreis oder eine Kugel, so ist seit alters her bekannt, dass man Längen, Flächeninhalte oder Volumina im gekrümmten Fall nicht exakt messen kann, denn der Vergleich mit entsprechenden Einheitsmaßen (Strecke, Quadrat, Würfel) setzt Geradlinigkeit bzw. Rechtwinkligkeit voraus. Ob Babylonier (seit ungefähr 2000 v. Chr.), Ägypter, Chinesen, Inder, Griechen, ..., die Untersuchung der Magie der Kreiszahl **π** hat eine mehr als 4000-jährige Geschichte.[2]

---

[1] Ein **Axiom** ist eine unbeweisbare Festlegung, z.B. lautet das erste Peano-Axiom: **1** ist eine natürliche Zahl.

[2] Interessierten sei empfohlen: David Blatner: π - Magie einer Zahl; Rowohlt Verlag

π, das griechische **p** steht für **P**eripherie, d.h. man suchte eine Zahl, mit der man den Durchmesser eines Kreises multiplizieren konnte um (näherungsweise) die Umfangslänge des Kreises zu erhalten.
Archimedes von Syrakus (287 - 212 v. Chr.), der große Mathematiker, Naturwissenschaftler, Ingenieur ..., des Altertums, der auf dem Marktplatz von Syrakus von einem ignoranten römischen Hauptmann getötet worden sein soll, als dieser durch seine auf dem Boden fixierten Skizzen lief ("Störe meine Kreise nicht"!), hatte für **π** durch Berechnung der Umfangslänge eines 96-Ecks folgende Abschätzung angegeben: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$, was in der Dezimaldarstellung die 2. Nachkommastelle sichert.



Sehen wir uns den berühmten Grabstein des Archimedes an, so finden wir auch hier in gewisser Weise die Kreiszahl **π**. Das Bild auf dem Stein bezieht sich auf eine Entdeckung des Archimedes, auf die er besonders stolz war. Stellt man sich die gestrichelte Linie als Rotationsachse vor, so entstehen bei Rotation 3 geometrische Körper: Zylinder, Kugel und Kegel. Archimedes hat herausgefunden, dass das Verhältnis der Volumina wie 3 : 2 : 1 ist.

$\pi \approx 3{,}1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923 \ldots$

Nach über 4000 Jahren Forschung wissen wir: **π** hat in der Dezimaldarstellung keine endliche Stellenanzahl, es tauchen keine Perioden auf , und erst seit 1882 (Ferdinand von **Lindemann**) ist bewiesen, dass man auch niemals eine algebraische Gleichung (mit ganzzahligen Koeffizienten) finden kann, die **π** als Lösung besitzt. - Eine erstaunliche Zahl !
Wer sich dennoch der Zahl einmal nähern möchte, hier eine von vielen Möglichkeiten:

$$\pi \approx 2 \cdot \frac{2\cdot 2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4\cdot 4}{3\cdot 5} \cdot \frac{6\cdot 6}{5\cdot 7} \cdot \frac{8\cdot 8}{7\cdot 9} \;.....$$

0: Was ist **0**? - Das neutrale Element der Addition, sagen die Mathematiker, denn wenn ich zu einer Zahl **0** addiere, dann verändert sie sich nicht: **0** + 4711 = 4711, - und diese Additionsaufgabe funktioniert natürlich mit jeder anderen Zahl als 4711 genau so. - Das soll alles sein? - "Du bist eine **Null** !" - sagt man im Sprachgebrauch beleidigend zu einer Person, die man für bedeutungslos hält. - Was für eine riesige Unterschätzung der Bedeutung dieser Zahl, die man auch als absorbierendes Element der Multiplikation auffassen kann, denn es gilt: $\mathbf{0} \cdot z = \mathbf{0}$ für jede Zahl z![3]
Wie haben eigentlich Römer, Griechen, Ägypter, ... in alter Zeit gerechnet, als die Null noch unbekannt war? Und auch noch später, bis in die Zeit um 1000 nach Chr. hat man im Europa mit primitiven Rechenbrettern gerechnet, weil man noch kein Stellenwertsystem kannte. Erst **Gerbert von Aurillac** (945 - 1003; der spätere Papst Sylvester II) versuchte sich mit Schriftzeichen für Zahlen, die er bei den Arabern kennen gelernt hatte, und es dauerte bis zu **Leonardo von Pisa** (1170/80 - 1240) und der Veröffentlichung seines Buches "Liber abaci" im Jahre 1202, um zu erkennen, welche zentrale Bedeutung die **0** für unser Rechnen hat. Um nämlich in einem Stellenwertsystem mit stets denselben Ziffern rechnen zu können muss man kennzeichnen können, dass einer Stelle eben kein Wert zugewiesen wird wie z.B. bei der Zahl 4093, die wir selbstverständlich von 493 unterscheiden. - Übrigens, erfunden wurde die **0** wohl in Indien - vor langer Zeit.

[3] Interessierten sei empfohlen: Robert Kaplan: Die *Geschichte* der Null; Campus Verlag

i: Was ist **i**? - Die imaginäre Einheit, sagen die Mathematiker, denn wenn ich **i** mit sich selbst multipliziere, dann ist das Ergebnis: **i** · **i** = -1. - Was soll denn das sein? - Das Produkt einer Zahl mit sich selbst ist doch immer positiv!?
Auf Girolamo **Cardano**, geboren am 24.09.1501 in Pavia, gestorben am 21.09.1576 in Rom geht folgende Aufgabe zurück: "Zerlege die Zahl 10 so in zwei Teile, dass das Produkt dieser 2 Teile 40 ergibt", was in Form einer Gleichung besagt, dass für den noch unbekannten Teil x gelten muss:

$$x \cdot (10 - x) = 40$$

Diese Aufgabe ist nur lösbar, wenn es eine Zahl geben würde, die mit sich selbst multipliziert -15 ergibt und Cardano postulierte in seiner Imagination die Existenz solcher Zahlen. Und siehe da, er konnte damit vernünftig rechnen. Carl Friedrich **Gauß** (1777 - 1855), dessen Bildnis wohl jedem noch von dem alten 10 DM - Schein geläufig sein dürfte, verdanken wir ein Modell, das solche Zahlen anschaulich werden läßt: Wir stellen uns Zahlen nicht mehr als Punkte auf einer Geraden vor, sondern als Punkte einer Ebene. Damit ist eine Zahl ein Komplex von 2 Anteilen z.B. (2 ; 5), einem normalen (reellen) Anteil 2 und einem imaginären Anteil 5, d.h. eine komplexe Zahl schreibt sich nun als 2 · **1** + 5 · **i**, als Summe der Vielfachen der reellen Einheit (**1**) und der imaginären Einheit (**i**). Eine tolle Idee! - Im Modell kann man mit Punkten einer Ebene genau so vernünftig rechnen wie zuvor mit Punkten auf der Zahlengeraden! - Und viele Probleme lassen sich in diesem stark vergrößerten Zahlenbereich viel besser beschreiben und lösen. Die komplexen Zahlen sind eine wesentliche Grundlage der mathematischen Beschreibung moderner Naturwissenschaft.

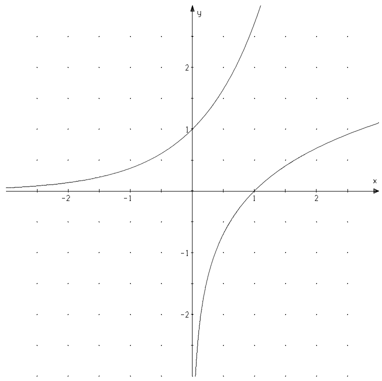
e: Eigenartig - Alles was wächst oder zerfällt, sich entwickelt und wird, hat irgendwie mit dieser Zahl zu tun, der man zu Ehren eines weiteren Genies unserer abendländischen Kultur, Leonhard **Euler** (1707 - 1783) den Namen: Eulersche Zahl **e** gegeben hat.[4] - Wir stellen uns vor, es gäbe eine Bank, die mit 100% verzinst. Dann erhielte man für einen eingezahlten Euro nach einem Jahr einen Euro dazu und besäße nun 2 €. Wenn nun etwas kontinuierlicher verzinst würde, z.B. schon nach einem halben Jahr, so besäße man nach einen halben Jahr 1,50 € und für das zweite halbe Jahr bekäme man dann 0,75 € Zinsen, so dass man insgesamt nach einem Jahr nun 2,25 € besäße. Eine Fortsetzung der Überlegung führt dazu, dass man für immer kurzfristigere Zinszahlungstermine natürlich immer noch etwas besser am Ende eines Jahres da stehen würde, und das (theoretische) Ergebnis einer stetigen Zinszahlung würde am Ende eines Jahres ein Guthaben von **e** € erzeugen, also ungefähr 2,72 €.

e ≈ 2,71828182845904523536028747135266249775724709369969676277240766 ....

Wie die Kreiszahl **π** hat **e** in der Dezimaldarstellung keine endliche Stellenanzahl, es tauchen keine Perioden auf, und man kann auch niemals eine algebraische Gleichung (mit ganzzahligen Koeffizienten) finden, die **e** als Lösung besitzt. - Eine (weitere) erstaunliche Zahl !
Und immer, wo es um Wachstum, Wachstumsdynamik, Änderungsraten, ... usw. geht, das heißt, funktional-mathematisch gesprochen, um exponentielle Vorgänge, so spielt als Basis dieser Prozesse die Eulersche Zahl **e** eine Rolle (übrigens auch beim Steuersatz, der lokalen Änderungsrate der Steuerfunktion, - wie ärgerlich).

---

[4] Eigentlich wurde das Symbol **e** schon vor Leonhard Euler verwendet und kommt von **E**xponent.



Sieht man sich den funktionalen Zusammenhang der Exponentialfunktion zur Basis **e** an, so entdeckt man den Graphen der "erstaunlichsten Funktion des Universums": Die Vergangenheit definiert die Zukunft (und umgekehrt), denn die Funktionswerte an den Stellen t (Zukunft) und -t (Vergangenheit) sind Kehrwerte voneinander, der Graph ist ideal gekrümmt, denn dort, wo z.B. der Funktionswert 2 ist, ist auch der Anstieg 2, und auch die lokale Änderungsrate des Anstiegs 2, und auch die lokale Änderungsrate der lokalen Änderungsrate 2, und auch ..... . Diese Funktion symbolisiert das ideale, dynamische Wachstum, ihre Umkehrfunktion, die natürliche Logarithmusfunktion, ist der Prototyp des schwachen Wachstums. - Was ließe sich ohne die Eulersche Zahl **e** alles nicht beschreiben?

5 Zahlen von immenser Bedeutung in unserem Universum, verbunden über eine Gleichung?!

Allein schon die Konstruktion des ersten Teils der Gleichung flößt einem Ehrfurcht ein: Die Eulersche Zahl **e** (die man als Dezimalzahl nicht aufschreiben kann!) als Basis einer Potenz mit einem Exponenten aus dem Produkt der imaginären Einheit **i** und der Kreiszahl $\boldsymbol{\pi}$, (die man wiederum als Dezimalzahl nicht aufschreiben kann!) und das Ergebnis muss **-1** sein???!!!

Schon bei **Platon** entdeckt man in seinem Höhlengleichnis die Einsicht, dass die Natur mehr Begriffe und Geheimnisse kennt, als unsere Bewusstsein fassen kann, und so müssen wir uns eben oft mathematischer Methoden bedienen, um Zipfel der Erkenntnis (im wahrsten Sinne des Wortes) zu begreifen.

Wiederum Leonhard **Euler** hat bewiesen, dass für jeden Winkel α das sogenannte Eulersche Theorem: $\mathbf{e^{i \cdot \alpha} = \cos(\alpha) + i \cdot \sin(\alpha)}$ richtig ist, was über eine Reihenentwicklung der 3 Funktionsterme leicht einsehbar ist, womit wiederum ein weiteres mathematisches Prinzip unseres Universums erkennbar wird: Unser Universum ist in vielfacher Hinsicht mathematisch harmonisch aufgebaut, d.h. jeder funktionale Zusammenhang läßt sich durch Überlagerung von ganzrationalen Funktionstermen erzeugen oder auch durch Überlagerung von geeigneten Sinusfunktionen (man denke nur an die Musik - oder die Informationstechnologie - , wo sich jeder Ton - oder jedes Signal - aus Sinusschwingungen erzeugen läßt).

Setzt man für $\boldsymbol{\alpha}$ im Eulerschen Theorem $\boldsymbol{\pi}$ ein, so ergibt sich tatsächlich:

$$\mathbf{e^{i \cdot \pi} = \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1 + i \cdot 0 = -1}$$

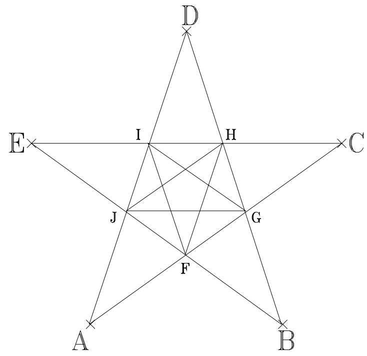
und damit:

$$\boxed{\mathbf{e^{i \cdot \pi} + 1 = 0}}$$

Nachtrag:

“Alles in der Welt ist Zahl und ist wohlgeordnet in Verhältnissen von (natürlichen) Zahlen”

so glaubte man die Welt im Altertum bis zu dem Geheimbund der Pythagoräer begreifen zu können. - Die Pythagoräer jedoch hatten entdeckt, dass Strecken mit Zirkel und Lineal konstruierbar sind, die in keinem (rationalen) Zahlenverhältnis zueinander stehen, und damit nicht messbar sind. Diese Erkenntnis war eine geistesgeschichtliche Revolution! Ihr Erkennungszeichen war das Pentagramm, wo eine längere zu einer kürzeren Seite stets im gleichen, inkommensurablen Verhältnis steht, dem **göttlichen** Verhältnis des Goldenen Schnitts. Zu Ehren des Baumeisters des Parthenon-Tempels: **Phidias** (ΦΙΔΙΑΣ) hat man dieses göttliche Zahlenverhältnis mit dem Buchstaben Φ bezeichnet.



$$\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \approx 1{,}61803398...$$

Und wo überall finden wir das Verhältnis des **goldenen Schnitts** wieder: In der Architektur, in der Malerei, in der Natur, ... die harmonische Proportion ist ein weiteres Stück Mathematik unseres Universums.

Bei der Untersuchung der Vermehrung einer Population (Kaninchen) ist **Leonardo** (Fibonacci) **von Pisa** auf die Folge der Fibonacci-Zahlen gestoßen, bei der, beginnend mit 2 Einsen, die nachfolgende Zahl stets die Summe der beiden Vorgänger ist. - Mit dieser Vorschrift ergibt sich:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ...$$

Bildet man nun eine neue Folge von Quotienten zweier aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, d.h. es beginnt mit: $\frac{1}{1}$; $\frac{2}{1}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{3}$; ... , so nähert sich das Zahlverhältnis immer mehr dem goldenen Schnitt **Φ** , - und - in der Natur ist die z.B. die Anzahl von Blättern bei Blüten stets eine Fibonacci-Zahl, genau so wie zumeist die Anzahl von Zacken bei Blättern (Phyllotaxis).

máthēma = das Gelernte, die Kenntnis
mathematikói (μαϑηματικοί), d. h. die durch Lernen Einsicht erlangt Habenden
mathēmatikos = lernbegierig

David Hilbert: *“Wir müssen wissen, und wir werden wissen!”*