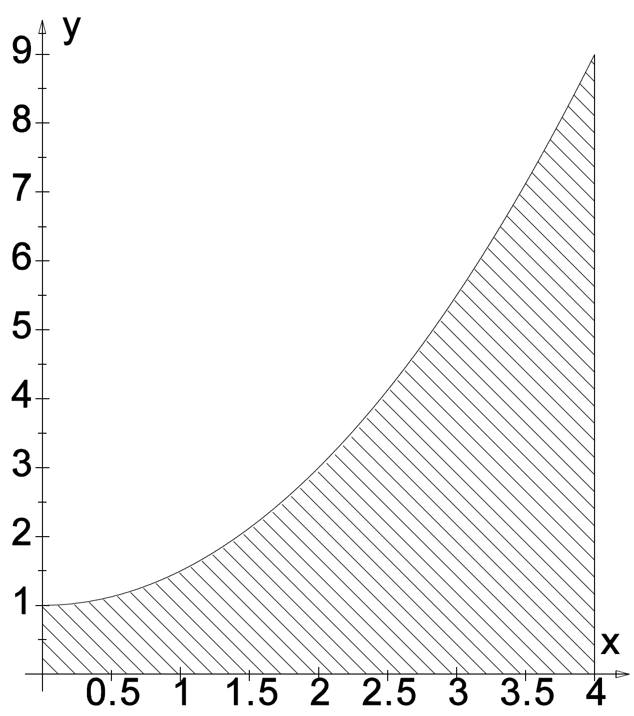
Zur Approximation von Flächeninhalten

Gegeben ist die Funktion **f** mit: $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 + 1$.

Gesucht ist der Inhalt der Fläche, den der Graph von **f** über dem Intervall [0 ; 4] mit der x-Achse einschließt.



Der Graph von **f** soll abschnittsweise durch ganzrationale Funktionen nullten Grades, d.h. der Flächeninhalt soll durch Summen von Maßzahlen von Rechtecken approximiert werden.

<u>Aufgaben:</u>

1. Auf Blatt 2 zeigt die erste Graphik die Approximation der Fläche durch 4 Rechtecke, deren Maßzahlsumme sicherlich kleiner als der gesuchte Flächeninhalt ist. Schreiben Sie an jedes Rechteck die zugehörige Maßzahl des Flächeninhaltes und geben Sie den Wert der Summe an ($\mathbf{U_4}$).

2. Auf Blatt 2 zeigt die zweite und dritte Graphik eine jeweilige Verfeinerung der Approximation. Begründen Sie, dass die Maßzahlsummen durch diese Verfeinerung größer werden, dass der gesuchte Flächeninhalt aber immer noch größer als diese Summen ist. Geben Sie den Wert der beiden Summen ($\mathbf{U_8}$ und $\mathbf{U_{16}}$) an.

3. Auf Blatt 2 zeigen die 3 Graphiken der 2. Zeile die Approximation der Fläche durch Rechecke, deren Maßzahlsummen jeweils größer als der gesuchte Flächeninhalt ist. Schreiben Sie an die 4 Rechtecke der ersten Graphik der 2. Zeile wiederum die Maßzahlen der Flächeninhalte, geben Sie den Wert der Summe an ($\mathbf{O_4}$) und vergleichen Sie mit der Summe ($\mathbf{U_4}$) aus Punkt 1. - Kann man den Unterschied geometrisch interpretieren?

4. Auf Blatt 2 zeigt die zweite und dritte Graphik der 2. Zeile eine jeweilige Verfeinerung der Approximation. Begründen Sie, dass die Maßzahlsummen durch diese Verfeinerung kleiner werden, dass der gesuchte Flächeninhalt aber immer noch kleiner als diese Summen ist. Geben Sie den Wert der beiden Summen ($\mathbf{O_8}$ und $\mathbf{O_{16}}$) an. <u>Hinweis:</u> Man kann viel Schreib- (oder Tipparbeit am Taschenrechner) sparen, wenn man die vorherigen Ergebnisse ($\mathbf{U_8}$ und $\mathbf{U_{16}}$) verwendet und den Unterschied bestimmt!

5. Begründen Sie, dass für den Fall der Zweierpotenzeinteilung des Intervalls ($n := 2^k$; $k \in \mathbb{N}^*$) die Folge der Intervalle $\mathbf{I_n} := \left[\mathbf{U_n} \; ; \; \mathbf{O_n} \right]$ eine Intervallschachtelung darstellt. Geben Sie für die Intervalllänge $\mathbf{l_n} := \mathbf{O_n} - \mathbf{U_n}$ einen allgemeinen Term in Abhängigkeit von n an und beweisen Sie: $\lim\limits_{n \to \infty} \mathbf{l_n} = 0$.

6. Informieren Sie sich in geeigneter Literatur über den Mathematiker: Bernhard **Riemann**.

Zur Approximation von Flächeninhalten