Die Traktrix

Problemstellung:

Eine Uhr mit angehängter Uhrkette der Länge **l** liegt auf der oberen Ecke eines Tisches, die Uhrkette hat gerade die Länge der Breite des Tisches.
Bewegt man nun den Uhrkettenanfang längs der Breite des Tisches nach rechts, so ist der Graph, auf dem die Uhr sich bewegt, zu bestimmen.

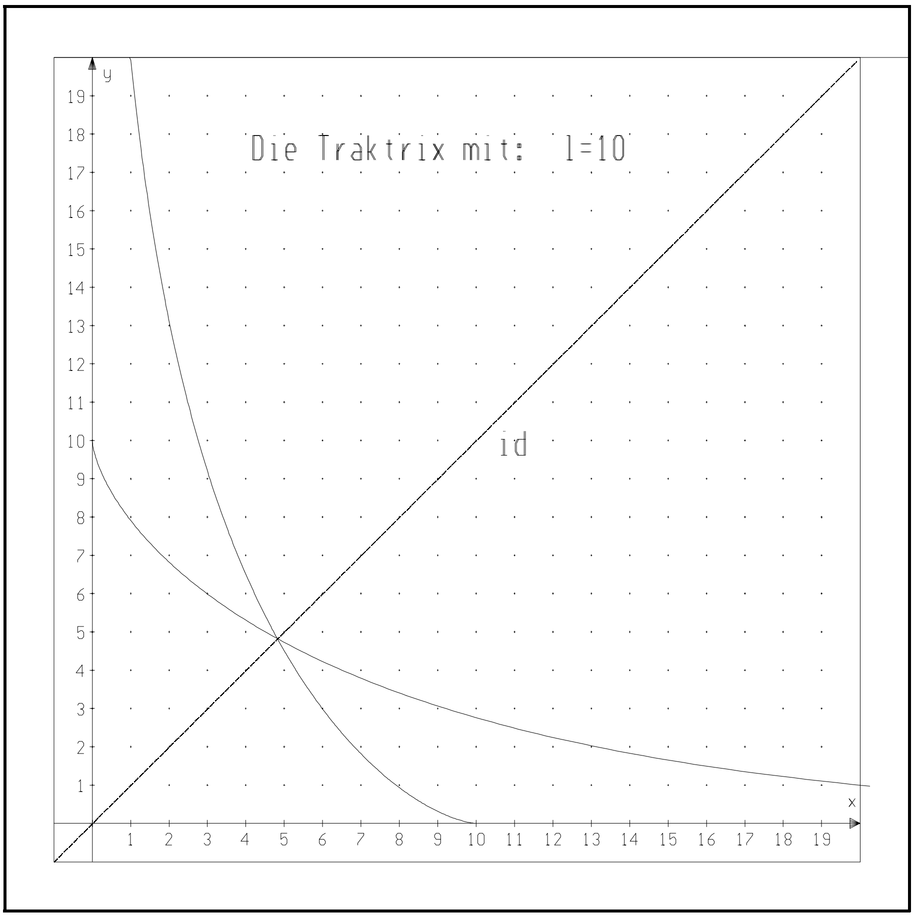
Nach Einführung eines geeigneten Koordinatensystems entwickelt man leicht, dass das Problem auf die Lösung der Differentialgleichung:

$$\mathbf{y'} = -\frac{\mathbf{y}}{\sqrt{\mathbf{l}^2 - \mathbf{y}^2}} \qquad \text{führt!}$$

Mit den Anfangswertbedingungen: **x = 0 ; y = l** ergibt sich folgende Gleichung einer Lösungsrelation:

$$\mathbf{x} = \mathbf{l} \cdot \ln\left(\frac{\mathbf{l} + \sqrt{\mathbf{l}^2 - \mathbf{y}^2}}{\mathbf{y}}\right) - \sqrt{\mathbf{l}^2 - \mathbf{y}^2}$$

Die folgende graphische Darstellung zeigt eine Lösungsrelation mit der zugehörigen Umkehrrelation.



Die Traktrix

Lösung der Differentialgleichung:

$$y' = -\frac{y}{\sqrt{l^2-y^2}} \quad\Leftrightarrow\quad \int \frac{\sqrt{l^2-y^2}}{y}\,dy = -x + C$$

Mit der Substitution: $\sqrt{l^2 - y^2} =: z \quad\Rightarrow\quad \frac{dz}{dy} = \frac{-y}{z}$ ergibt sich:

$$\int \frac{\sqrt{l^2-y^2}}{y}\,dy =$$

$$= \left(\int \frac{z}{y} \cdot \frac{z}{-y}\,dz \right) = -\int \frac{z^2}{l^2-z^2}\,dz$$

$$= -\int \left(\frac{\frac{1}{2}z}{l-z} - \frac{\frac{1}{2}z}{l+z} \right) dz = \frac{1}{2}\int z \cdot \frac{1}{l+z}\,dz - \frac{1}{2}\int z \cdot \frac{1}{l-z}\,dz$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[z \cdot \ln(l+z) - \int 1 \cdot \ln(l+z)\,dz \right] - \frac{1}{2} \cdot \left[z \cdot \left(-\ln(l-z)\right) + \int 1 \cdot \ln(l-z)\,dz \right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot z\cdot\ln(l^2-z^2) - \frac{1}{2}\cdot\left[(l+z)\cdot\ln(l+z) - (l+z) \right] + \frac{1}{2}\cdot\left[(l-z)\cdot\ln(l-z) - (l-z) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\cdot z\cdot\ln(l^2-z^2) - \frac{1}{2}\cdot l\cdot\ln(l+z) - \frac{1}{2}\cdot z\cdot\ln(l+z) + \frac{1}{2}\cdot l\cdot\ln(l-z) - \frac{1}{2}\cdot z\cdot\ln(l-z) + z$$

$$= z - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{l+z}{l-z}\right) = \sqrt{l^2 - y^2} - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{l-\sqrt{l^2-y^2}} \right)$$

$$= \sqrt{l^2 - y^2} - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \ln\left(\frac{\left(l+\sqrt{l^2-y^2}\right)^2}{l^2-(l^2-y^2)} \right) = \sqrt{l^2 - y^2} - l \cdot \ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{y} \right)$$

Damit gilt:

$$-x + C = \sqrt{l^2 - y^2} - l \cdot \ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{y} \right)$$

$$\Leftrightarrow \qquad x = l \cdot \ln\left(\frac{l+\sqrt{l^2-y^2}}{y} \right) - \sqrt{l^2 - y^2} - C$$

Die Traktrix

Nachtrag zur Lösung (für Pfiffige):

Statt partieller Integration kommt man in der dritten Zeile schneller zum Ziel, wenn man den Trick mit der geschickten Addition der Null anwendet:

$$\int \frac{\sqrt{l^2 - y^2}}{y}\, dy =$$

$$= \left(\int \frac{z}{y} \cdot \frac{z}{-y}\, dz \right) = -\int \frac{z^2}{l^2 - z^2}\, dz$$

$$= -\int \left(\frac{\frac{1}{2}z}{l - z} - \frac{\frac{1}{2}z}{l + z} \right) dz = \frac{1}{2} \int \frac{z + l - l}{l + z}\, dz - \frac{1}{2} \int \frac{z - l + l}{l - z}\, dz$$

$$= \frac{1}{2} \int 1\, dz - \frac{1}{2} \int \frac{l}{l + z}\, dz + \frac{1}{2} \int 1\, dz - \frac{1}{2} \int \frac{l}{l - z}\, dz$$

$$= z - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \ln \left(\frac{l + z}{l - z} \right) = \sqrt{l^2 - y^2} - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - y^2}}{l - \sqrt{l^2 - y^2}} \right)$$

$$= \sqrt{l^2 - y^2} - \frac{1}{2} \cdot l \cdot \ln \left(\frac{\left(l + \sqrt{l^2 - y^2} \right)^2}{l^2 - (l^2 - y^2)} \right) = \sqrt{l^2 - y^2} - l \cdot \ln \left(\frac{l + \sqrt{l^2 - y^2}}{y} \right)$$