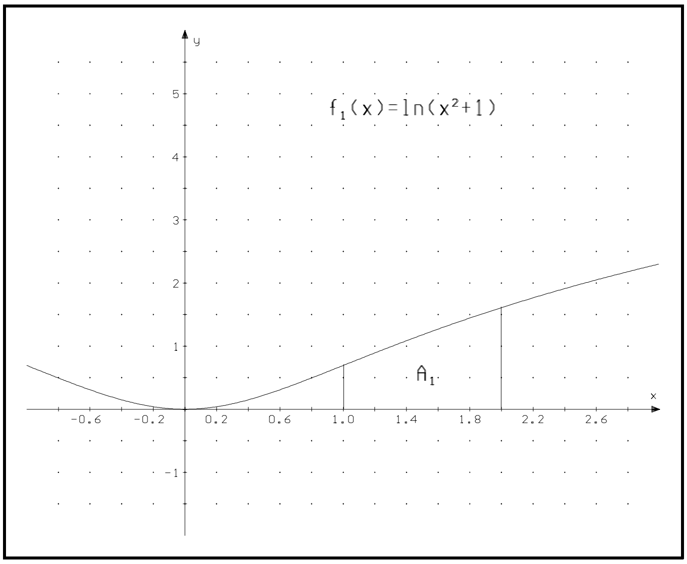
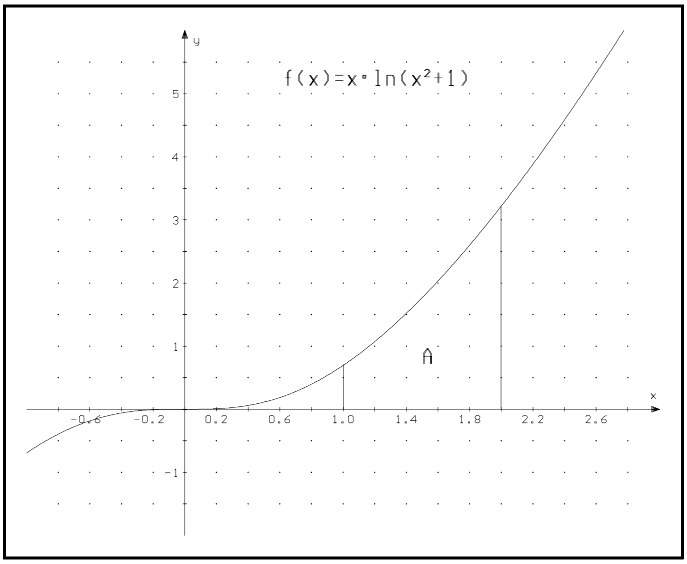
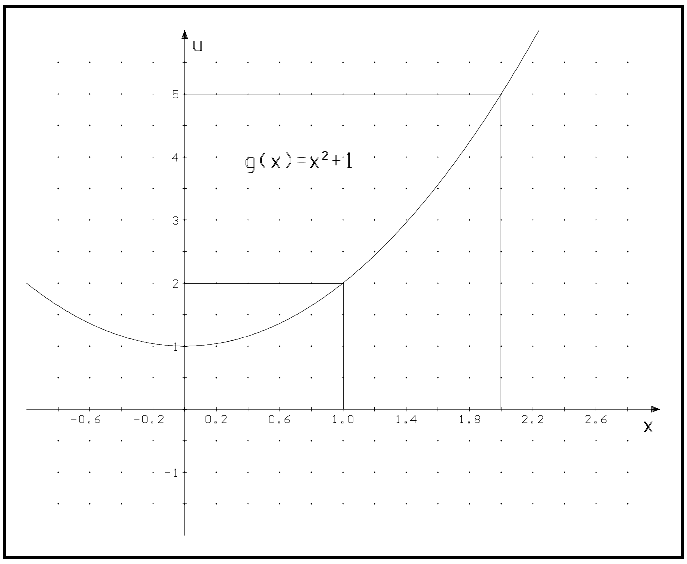
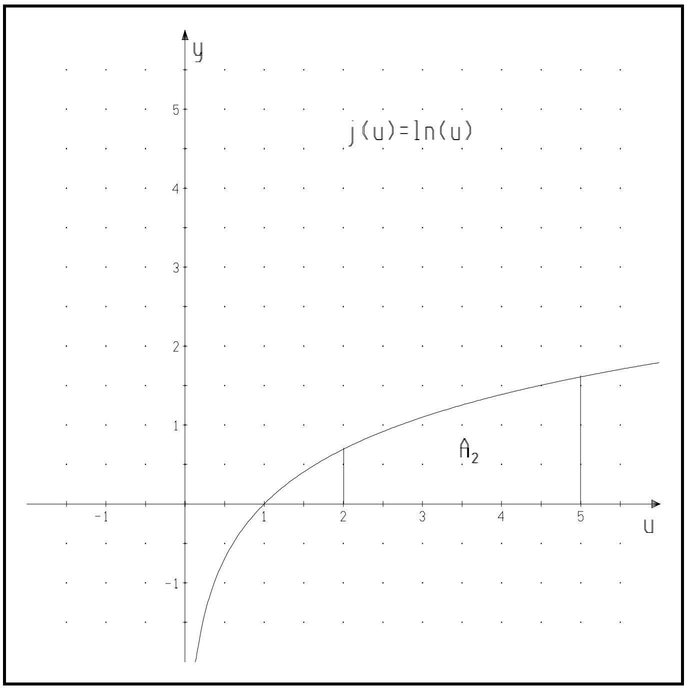
Zur Integration durch Substitution

(Umkehrung der Kettenregel der Differentiation)









Gesucht ist der Flächeninhalt **A**, d.h. der Wert des folgenden bestimmten Integrals:

$$A := \int_1^2 x\cdot\ln(x^2+1)\ dx$$

(*Kennzeichnen Sie die Fläche durch Schraffur im obigen Diagramm*!)

Überträgt man die Problematik der Hintereinanderausführung zweier Funktionsvorschriften (Funktion $\mathbf{f_1}$: $x \mapsto y$) wieder in **2** Diagramme (Funktion **g**: $x \mapsto u$; Funktion **j**: $u \mapsto y$), so bewirkt die Funktion **g**, will man die Integration nun im Diagramm III der Funktion **j** ausführen, einerseits eine Veränderung des betrachteten Intervalls (statt $[1;2]$ als x-Intervall nun $[2;5]$ als u-Intervall), andererseits auch eine '<u>Maßstabsverzerrung</u>' der Breiten der rechteckigen Riemann-Summanden!

Die '<u>Maßstabsverzerrung</u>' wird ausgedrückt durch den Zusammenhang der Differentiale **du** und **dx**. Es gilt im Diagramm II:

$$\mathbf{du} = g'(x)\cdot\mathbf{dx} = 2\cdot x\cdot\mathbf{dx}$$

Damit gilt:

$$A = \frac{1}{2}\cdot\int_1^2 \ln(x^2+1)\cdot 2\cdot x\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int_2^5 \ln(u)\cdot du = \frac{1}{2}\cdot A_2$$

(*Übertragen Sie **<u>maßstabsgerecht</u>** den Graphen von **f** in das links stehende Diagramm III, indem Sie die u-Achse temporär als x-Achse auffasssen! Kennzeichnen Sie die Fläche **A** und vergleichen Sie mit $\mathbf{A_2}$!*)