

# Lineare Abbildungen und Matrizen

## Mathematisches Modell eines zweistufigen Produktionsprozesses

---

Ein Möbelhaus bietet ein Bücher-Wohnwandprogramm in vier Versionen an:  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  und  $V_4$ . Die vier Versionen werden aus Grundregalen G, Anbauregalen A, Wohnschränkelementen W und Schubladenelementen S zusammengesetzt. Zur Herstellung der Elemente werden senkrechte Leitern L, Böden B, Schübe SH und Türen T benötigt, die von einem Zulieferer bezogen werden. Die anzahlmäßigen Anteile gibt die folgende Übersicht:

$V_1$ : 2G 2A	G: 2L 4B 1SH
$V_2$ : 1G 1A 1W 1S	A: 1L 4B 1SH
$V_3$ : 1G 1A 2W	W: 2L 1B 1SH 4T
$V_4$ : 1G 1A 2S	S: 2L 1B 3SH

---

### Aufgaben:<sup>1</sup>

- Beschreiben Sie den zweistufigen Produktionsprozess durch lineare Abbildungen  $f$  und  $g$ , indem Sie zunächst geeignete "Mengenvektorräume" bzw deren kanonische Basen definieren und dann die zugehörigen Produktionsmatrizen  $A_f$  und  $B_g$  nennen. Welche Bedeutung haben die Spalten der Matrizen?
- Begründen Sie, warum die Matrizenmultiplikation (Verknüpfung) im allgemeinen nicht kommutativ ist.
- Geben Sie die Rohstoffverbrauchsmatrix an, welche die verknüpfte Abbildung beschreibt, und bestätigen Sie den monatlichen Lieferbedarf von 8600 L, 16000 B, 6800 SH und 3200 T, wenn in diesem Zeitraum gemäß einer erwarteten Nachfrage (Erfahrungswert) stets 500  $V_1$ , 400  $V_2$ , 200  $V_3$  und 200  $V_4$  montiert werden.
- Beweisen Sie: Eine der linearen Abbildungen ( $f$  oder  $g$ ) ist umkehrbar, die andere nicht.
- Berechnen Sie für die umkehrbare Abbildung die inverse Matrix nach dem Gauß-Jordan-Verfahren.
- Durch leichte Beschädigung bei der Lieferung mußten 160 L, 275 B, 135 SH und 60 T aussortiert werden. Es sollen daraus Elemente 2. Wahl hergestellt werden, die dann zum weiteren Selbstbau als Sonderangebot verkauft werden sollen. Welche und wie viele Elemente können angeboten werden?
- Mit dem Zulieferer besteht ein langfristiger Liefervertrag über die in c) benannten Rohstoffmengen, eine kurzfristige Änderung ist nicht möglich. Eine erhöhte Nachfrage nach den Versionen  $V_3$  und  $V_4$  läßt nun eine monatliche Fertigung von jeweils 300 statt 200 Einheiten wünschenswert erscheinen, eine gleichzeitige Einschränkung der Produktion von  $V_1$  und  $V_2$  ist wegen Lagerbeständen möglich. Kann durch Umorganisation der Fertigung dem Bedarf Rechnung getragen werden?  
Entwerfen Sie eine mathematische Formulierung des Problems und erörtern Sie die Folgen bezüglich Lagerhaltung, Auslastung der Produktion bzw Herstellung von  $V_1$  und  $V_2$ .

---

<sup>1</sup> Dieses Problem wurde vor vielen Jahren als Abituraufgabe gestellt. Als Arbeitszeit (es wurde viel erläuternder Text erwartet) waren 80 Minuten veranschlagt.

# Lineare Abbildungen und Matrizen

## Mathematisches Modell eines zweistufigen Produktionsprozesses

---

Einige Ergebnisse zum Vergleich:

$$a) \mathbf{A}_f := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_g := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$c) \mathbf{C}_{\text{gof}} = \begin{pmatrix} 6 & 7 & 7 & 7 \\ 16 & 10 & 10 & 10 \\ 4 & 6 & 4 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{\text{gof}} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86 \\ 160 \\ 68 \\ 32 \end{pmatrix}$$

$$d) \text{Rg}(\mathbf{A}_f) < 4$$

$$\text{Rg}(\mathbf{B}_g) = 4$$

$$e) \mathbf{B}_g^{-1} = \frac{1}{44} \cdot \begin{pmatrix} 44 & -4 & -28 & -14 \\ -44 & 16 & 24 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & -4 & 16 & -3 \end{pmatrix}$$

$$f) \mathbf{B}_g^{-1} \circ \begin{pmatrix} 160 \\ 275 \\ 135 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 30 \\ 15 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$g) \mathbf{C}_{\text{gof}} \circ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 300 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8600 \\ 16000 \\ 6800 \\ 3200 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x_1 + 7x_2 = 4400 \\ 16x_1 + 10x_2 = 10000 \\ 4x_1 + 6x_2 = 3200 \\ 4x_2 = 800 \end{cases}$$

Der eigentlich notwendige Übergang zu einem Ungleichungssystem (unter Beachtung von Nichtnegativitätsbedingungen):

$$\begin{cases} 6x_1 + 7x_2 \leq 4400 \\ 16x_1 + 10x_2 \leq 10000 \\ 4x_1 + 6x_2 \leq 3200 \\ 4x_2 \leq 800 \end{cases},$$

was i.a. zu Lagerhaltung (totes Kapital) und mangelnder Auslastung der Produktion führt, ist in diesem Fall überflüssig, da das überbestimmte Gleichungssystem eindeutig lösbar ist. Die Produktion ist mit 500  $V_1$  und 200  $V_2$  umorganisierbar.