Die Integralfunktion $\mathbf{F_1}$ mit $\mathbf{F_1}(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \cdot dt$

x	$F_1(x)$
1	0,0000
2	0,6931
3	1,0986
4	1,3863
5	1,6094
6	1,7918
7	1,9459
8	2,0794
9	2,1972
10	2,3026
11	2,3979
12	2,4849
13	2,5649
14	2,6391
15	2,7081
16	2,7726
17	2,8332
18	2,8904
19	2,9444
20	2,9957
50	3,9120
100	4,6052
150	5,0106
200	5,2983

x	$F_1(x)$
0,0625	-2,7726
0,1250	-2,0794
0,1875	-1,6740
0,2500	-1,3863
0,3125	-1,1632
0,3750	-0,9808
0,4375	-0,8267
0,5000	-0,6931
0,5625	-0,5754
0,6250	-0,4700
0,6875	-0,3747
0,7500	-0,2877
0,8125	-0,2076
0,8750	-0,1335
0,9375	-0,0645
1,0000	0,0000

Bekanntlich ist das Integral: $\int_{-1}^{4} \frac{1}{x}\, dx$ nicht definiert, da die Integration über die Definitionslücke nicht möglich ist.

Verändert man die untere Grenze der Integration jedoch in 1, so entsteht sicher ein wohldefinierter Ausdruck, d.h. der Wert des Bestimmten Integrals muß aus Existenz- und Stetigkeitsgründen über dem gesamten Intervall bestimmbar sein (Hauptsatz der Analysis)!

$$\mathbf{I} := \int_1^4 \frac{1}{x}\, dx = F(4) - F(1)$$

So einfach ist allerdings ein Stammfunktionsterm nicht zu finden!

Mit Hilfe eines Computerprogramms[1], das Grenzwerte von Folgen von Riemannsummen über ausgezeichneten Zerlegungsfolgen näherungsweise berechnen kann, wurden die nebenstehenden Wertetabellen für die Integralfunktion F_1 bestimmt.

1.) Begründen Sie: F_1 ist streng monoton wachsend !

2.) Bestimmen Sie über die Tabellen den Wert von **I** !

3.) Skizzieren Sie den Graphen von F_1 über dem Intervall: $[\, \frac{1}{4} ; 10\,]$!

4.) Läßt sich eine Aussage über die Beschränktheit der Funktionswerte formulieren ?

5.) Verifizieren Sie mit geeigneten Einsetzungen für a und b die Gültigkeit der unten stehenden Gleichungen mit Hilfe der Tabellen.

$$\int_1^{a\cdot b} \frac{1}{t}\cdot dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}\cdot dt + \int_1^{b} \frac{1}{t}\cdot dt \quad\Leftrightarrow\quad \int_1^{a\cdot b} \frac{1}{t}\cdot dt - \int_1^{a} \frac{1}{t}\cdot dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}\cdot dt \quad\Leftrightarrow\quad \int_a^{a\cdot b} \frac{1}{t}\cdot dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}\cdot dt$$

[1] Das Ihnen bekannte Programm „rieman“ wurde hier verwendet

Die Integralfunktion $\mathbf{F_1}$ mit $\mathbf{F_1}(x) = \int_1^x \frac{1}{t} \cdot dt$

Die nebenstehenden, den vorherigen Wertetabellen entnommenen Beziehungen (eigentlich nur äquivalente Umformungen gemäß der Additivität der Bestimmten Integration <u>einer</u> Gleichung) sollen nun begründet werden.

Wir wollen uns hierbei auf den Fall der äquidistanten Einteilung der betrachteten Intervalle auf der x-Achse beschränken.

$$\int_1^{a\cdot b} \frac{1}{t}\cdot dt = \int_1^{a} \frac{1}{t}\cdot dt + \int_1^{b} \frac{1}{t}\cdot dt$$

$$\int_1^{a\cdot b} \frac{1}{t}\cdot dt - \int_1^{a} \frac{1}{t}\cdot dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}\cdot dt$$

$$\int_a^{a\cdot b} \frac{1}{t}\cdot dt = \int_1^{b} \frac{1}{t}\cdot dt$$

<u>Offensichtlich gilt nach Grunddefinition:</u>

$$\begin{aligned}
\int_a^{a\cdot b} \frac{1}{t}\cdot dt &= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a + i\cdot\frac{a\cdot b - a}{n}} \cdot \frac{a\cdot b - a}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a + i\cdot\frac{a\cdot(b - 1)}{n}} \cdot \frac{a\cdot(b - 1)}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a\cdot\left(1 + i\cdot\frac{b - 1}{n}\right)} \cdot \frac{a\cdot(b - 1)}{n}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1 + i\cdot\frac{b - 1}{n}} \cdot \frac{b - 1}{n}\right] = \int_1^{b} \frac{1}{t}\cdot dt
\end{aligned}$$

Diese Integraleigenschaft bedeutet insbesondere z.B. graphisch, dass die Flächeninhalte unter der Normalhyperbel über den Intervallen : - $[1 ; 2]$, $[2 ; 4]$, $[4 ; 8]$, $[8 ; 16]$ ... , entsprechend: $\left[\frac{1}{2} ; 1\right]$, $\left[\frac{1}{4} ; \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{8} ; \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{16} ; \frac{1}{8}\right]$, ... - alle gleich groß sind!

<u>Daraus folgt:</u>

Die Funktionswerte der Integralfunktion $\mathbf{F_1}$ mit $\mathbf{F_1}(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\cdot dt$ sind nach oben und unten unbeschränkt!