Eine einfache Aufgabe

... oder doch nicht so einfach ??

In der nebenstehenden, nicht maßstabsgerechten Figur, sind 3 Streckenlängen bekannt:

$$\overline{AC} = 3$$

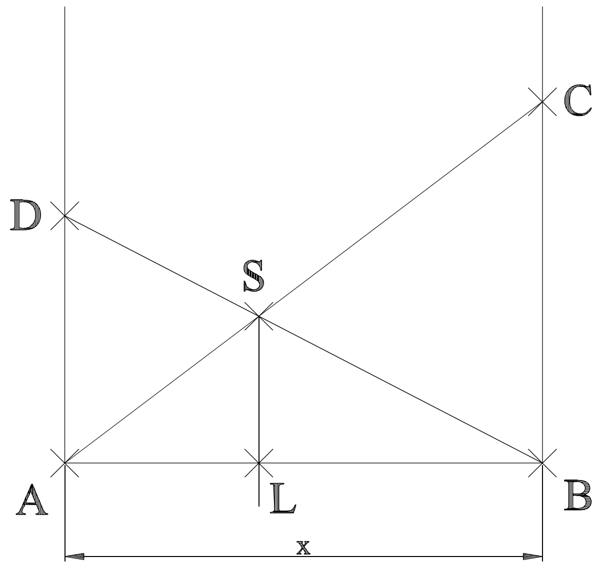
$$\overline{BD} = 2$$

$$\overline{SL} = 1$$

Bestimmt werden soll die Länge der Grundseite AB, d.h. es soll $x := \overline{AB}$ berechnet werden.

Selbstverständlich gilt: $AD \perp AB$ und $CB \perp AB$.

Sieht doch eigentlich ganz einfach aus!

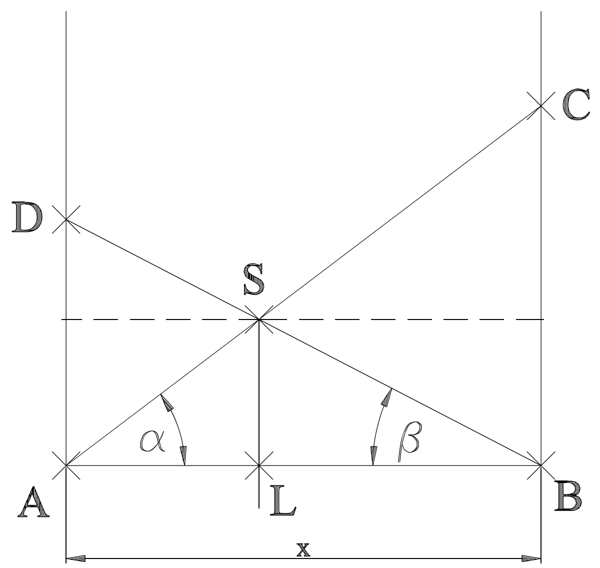


Nun, deine ersten Versuche haben sicher gezeigt, dass diese Aufgabe doch nicht so trivial zu lösen ist, und vermutlich wird x nicht ganzzahlig sein.

Es gibt sicher viele Lösungswege, aber wenn du keinen rein algebraischen Ansatz gefunden hast, so hilft dir vielleicht die nebenstehende Ergänzung der Skizze?!

Bei so vielen ähnlichen (rechtwinkligen) Dreiecken kommt man sicher mit trigonometrischen Funktionen zum Ziel!

<u>Bezeichnungen:</u> $x_1 := \overline{AL}$ und $x_2 := \overline{LB}$



<u>Eine (mögliche) Lösung:</u>

$$x_1 = \frac{1}{\tan(\alpha)} \qquad x_2 = \frac{1}{\tan(\beta)}$$

$$x = x_1 + x_2 = 3 \cdot \cos(\alpha) \qquad x = x_1 + x_2 = 2 \cdot \cos(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{1}{\tan(\beta)} = 3 \cdot \cos(\alpha)$$

Nun gilt: $$\frac{1}{\tan(\beta)} = \frac{\cos(\beta)}{\sin(\beta)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \cos(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \cos^2(\beta)}} = \frac{\frac{3}{2} \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{1 - \frac{9}{4} \cdot \cos^2(\alpha)}} = \frac{3 \cdot \cos(\alpha)}{\sqrt{4 - 9 \cdot \cos^2(\alpha)}}$$

Eine einfache Aufgabe
... oder doch nicht so einfach ??

Nach Einsetzen:
$$\frac{1}{\tan(\alpha)} + \frac{3\cdot\cos(\alpha)}{\sqrt{4-9\cdot\cos^2(\alpha)}} = 3\cdot\cos(\alpha)$$

Damit ist im Prinzip alles klar! - Aus der obigen Gleichung ist α zu bestimmen. Danach errechnet man β, womit über die Bestimmung von x_1 und x_2 das gesuchte Ergebnis folgt.

Nach einigen Umformungsschritten ist die obige Gleichungslösung äquivalent zur Nullstellenbestimmung der Funktion **f** mit:
$$\mathbf{f}(x) := \left(3\cdot\sin(x)-1\right)\cdot\sqrt{4-9\cdot\cos^2(x)} - 3\cdot\sin(x)$$

Entweder mit der Regula Falsi oder mit dem Newton-Verfahren ist eine Näherungslösung zu finden.

Newton-Verfahren:

n	**x_n**	**$f(x_n)$**	**$f'(x_n)$**	**x_{n+1}**	**α [°]**	**x ≈**
1	1,00000000	-0,73840150	5,60217523	1,13180621	64,84771918	1,27507666
2	1,13180621	-0,07216982	4,54473206	1,14768610	65,75756958	1,23179518
3	1,14768610	-0,00098459	4,42032133	1,14790884	65,77033180	1,23118585
4	1,14790884	-0,00000020	4,41855837	1,14790888	65,77033434	1,23118572
5	1,14790888	0,00000000	4,41855802	1,14790888	65,77033434	1,23118572

Lösung:[1] $\overline{AB}$ **= x ≈ 1,2312** (LE)

---

1 Wie groß sind eigentlich x_1, x_2 und β ?