Konfidenzintervalle - Güte einer Umfrage

Schluß von der Stichprobe auf die Gesamtheit - Schluß von der Gesamtheit auf die Stichprobe

In der Zeitung: "**Der Tagesspiegel**" in der Ausgabe vom 27.09. 1998 befand sich die nebenstehende Tabelle.

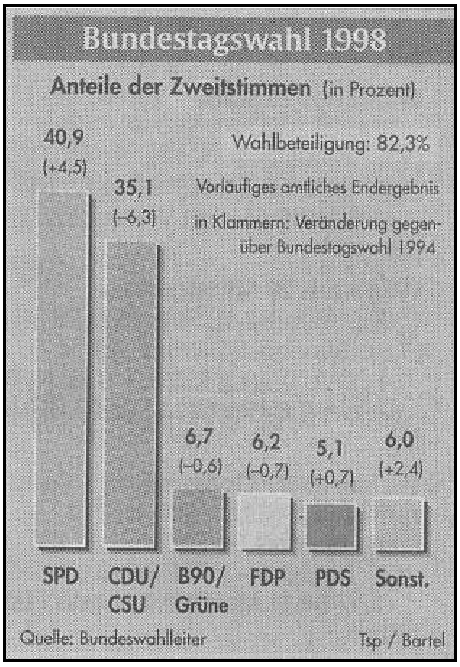
Letzte Umfrage-Ergebnisse zur Bundestagswahl

Institut	Datum	SPD	CDU/CSU	B90/G	F.D.P.	PDS	Sonstige
Emnid	25.09.98	40,5	39,0	7,0	5,0	4,0	4,5
Forsa	24.09.98	42,0	38,0	6,0	5,0	4,0	5,0
ZDF-Politbarometer*	18.09.98	39,5	37,5	6,0	5,5	4,5	7,0
dimap Institut	25.09.98	39,5	38,0	7,0	6,0	4,5	5,0
Institut für Demoskopie Allensbach	25.09.98	40,5	36,0	6,0	6,5	5,0	6,0
Bundestagswahl 1994	17.10.94	36,4	41,4	7,3	6,9	4,4	3,6

Quelle: rtr / *Forschungsgruppe Wahlen   Angaben in Prozent   Der Tagesspiegel / Kroupa

Sie zeigt Ergebnisse von Umfragen (ungefähr eine Woche vor der Wahl, in Form von Prozentsätzen) verschiedener Meinungsforschungsinstitute zu den Wahlchancen von Parteien, die zur Bundestagswahl 1998 angetreten sind.

1) Äußern Sie sich zu der Möglichkeit zu beurteilen: Welches ist das geringste, welches das größte prozentuale Ergebnis, mit dem die einzelnen Parteien auf Basis der Umfragen mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5% bei der Wahl rechnen konnten. Äußern Sie sich zu der Problematik, dass in der Tabelle die Größe der jeweiligen Stichprobe nicht angegeben ist.



Nebenstehend ist das vorläufige, amtliche Endergebnis der Bundestagswahl 1998 dargestellt (Quelle wiederum: "Der Tagesspiegel").

2) Beurteilen Sie vor dem Hintergrund des tatsächlichen Ergebnisses die Güte der vorherigen Umfragen. - Weichen die Umfrageergebnisse signifikant von dem tatsächlichen Ergebnis ab? - Wenn ja, benennen Sie mögliche Ursachen.

....

Die notwendige Größe der Stichprobe:

Wenn wir von einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5% ausgehen wollen, so müßte im Fall 2), dem **Schluß von der Gesamtheit auf die Stichprobe** (die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit **p** ist bekannt), unser (relatives) Stichprobenergebnis $\frac{X}{n}$ in einer $2 \cdot \frac{\sigma}{n}$- Umgebung um p liegen, d.h.:

$$p - 2 \cdot \frac{\sigma}{n} \le \frac{X}{n} \le p + 2 \cdot \frac{\sigma}{n}$$

Wir wollen die Intervalllänge, d. h. die Genauigkeit des Stichprobenergebnisses (in Abhängigkeit von n) abschätzen.

Es gilt:

$$
\begin{aligned}
2\cdot\frac{\sigma}{n} &= 2\cdot\frac{\sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}}{n}\\
&\leq 2\cdot\frac{\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}{\sqrt{n}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{5}}{100} \approx 2{,}24\% \qquad \text{für } n = 2000\ .
\end{aligned}
$$

Für das Folgende wollen wir deshalb von einer Stichprobengröße von n = 2000 ausgehen.[1]

---

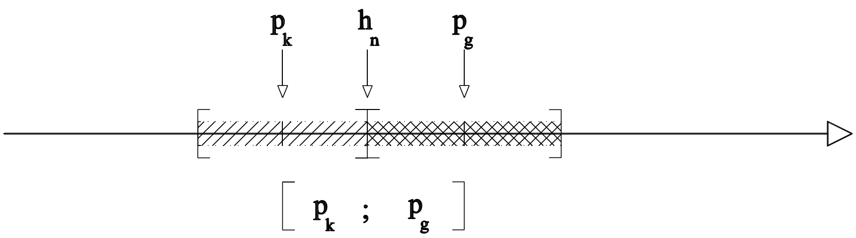
3) Untersuche, ob die Umfrageergebnisse für die CDU, bei Voraussetzung der Trefferwahrscheinlichkeit von **p** = 35,1% einen CDU-Wähler zu befragen, einem Stichprobenumfang n = 2000 und der geforderten Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5%, ungewöhnlich sind. Wenn ja, was könnten mögliche Ursachen sein.

Bei Aufgabe 1), dem **Schluß von der Stichprobe auf die Gesamtheit** besteht das grundsätzliche Problem, dass man die tatsächliche Trefferwahrscheinlichkeit nicht kennt und damit $2\cdot\frac{\sigma}{n}$ nicht berechnen kann.

a) Wir denken uns eine (noch unbekannte) Trefferwahrscheinlichkeit $\mathbf{p_k}$ so definiert, dass der rechte Rand der $2\cdot\frac{\sigma_k}{n}$-Umgebung um $\mathbf{p_k}$ das Stichprobenergebnis ist: Wir sagen dann: "$\mathbf{p_k}$ ist die kleinste Wahrscheinlichkeit, die mit dem Stichprobenergebnis auf dem 95,5% - Niveau verträglich ist".

b) Wir denken uns eine (noch unbekannte) Trefferwahrscheinlichkeit $\mathbf{p_g}$ so definiert, dass der linke Rand der $2\cdot\frac{\sigma_g}{n}$-Umgebung um $\mathbf{p_g}$ das Stichprobenergebnis ist: Wir sagen dann: "$\mathbf{p_g}$ ist die größte Wahrscheinlichkeit, die mit dem Stichprobenergebnis auf dem 95,5% - Niveau verträglich ist".

c) $[\ \mathbf{p_k}\ ;\ \mathbf{p_g}\ ]$ heißt Konfidenzintervall (Vertrauensintervall) für das Stichprobenergebnis $\frac{X}{n}$ bzw. die relative Häufigkeit h_n.



Die Intervalllänge des Konfidenzintervalls ist: $2\cdot\frac{\sigma_k}{n} + 2\cdot\frac{\sigma_g}{n}$.

---

[1] Beachte: Die Genauigkeit des Stichprobenergebnisses hat nichts mit der Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95.5% zu tun, im $2\cdot\frac{\sigma}{n}$-Intervall zu sein.

Wir wollen nun konkret das Konfidenzintervall für das Stichprobenergebnis der SPD: "39,5% Stimmenanteil" - bestimmen.

a)

$$p_k + 2\cdot\frac{\sqrt{p_k\cdot(1-p_k)}}{\sqrt{2000}} := \frac{395}{1000}$$

$$1000\cdot p_k + \sqrt{2000\cdot p_k - 2000\cdot p_k^2} = 395$$

$$2000\cdot p_k - 2000\cdot p_k^2 = 156025 - 790000\cdot p_k + 1000000\cdot p_k^2$$

$$1002000\cdot p_k^2 - 792000\cdot p_k + 156025 = 0$$

$$p_k^2 - \frac{792000}{1002000}\cdot p_k + \frac{156025}{1002000} = 0$$

$$\Rightarrow p_k \approx 39{,}52\% - 2{,}18\% = 37{,}34\%$$

b)

$$p_g - 2\cdot\frac{\sqrt{p_g\cdot(1-p_g)}}{\sqrt{2000}} := \frac{395}{1000}$$

$$1000\cdot p_g - \sqrt{2000\cdot p_g - 2000\cdot p_g^2} = 395$$

$$2000\cdot p_g - 2000\cdot p_g^2 = 156025 - 790000\cdot p_g + 1000000\cdot p_g^2$$

$$1002000\cdot p_g^2 - 792000\cdot p_g + 156025 = 0$$

$$p_g^2 - \frac{792000}{1002000}\cdot p_g + \frac{156025}{1002000} = 0$$

$$\Rightarrow p_g \approx 39{,}52\% + 2{,}18\% = 41{,}70\%$$

Auf Grund des Umfrageergebnisses von 2 Meinungsforschungsinstituten (bei einem angenommenen Stichprobenumfang von n = 2000) konnte die SPD mit einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95,5% mit mindestens 37,34% und höchstens 41,70% der Stimmen rechnen.

4) Beurteile den Rechenweg mit seinen einzelnen Schritten; könnte man sich nicht Arbeit sparen? - Ist das Konfidenzintervall symmetrisch zum Stichprobenergebnis? - Welchen Einfluß hätte eine kleinere (größere) Stichprobe auf die Rechnung bzw. die Endaussage?