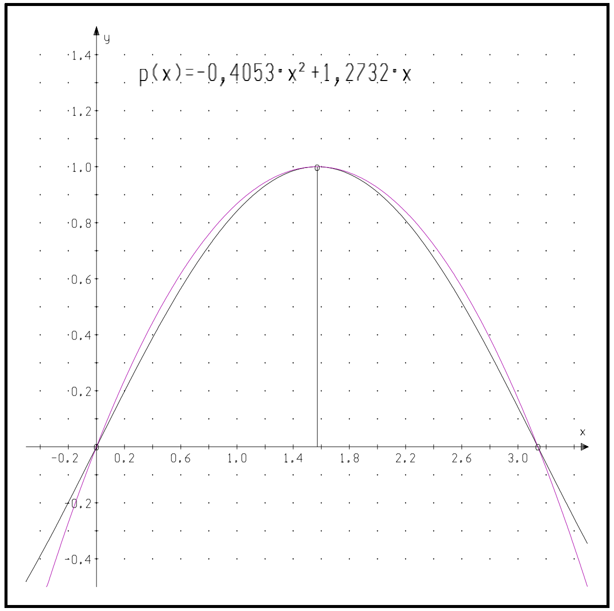
Zur Keplerschen Faßregel

Bestimmung von Näherungswerten Bestimmter Integrale durch Approximation von Funktionen durch Parabeln



Bei der Bestimmung von Näherungswerten von Flächenmaßzahlen haben wir zu Beginn des Kurses den Graphen der vorgegebenen Funktion durch ganzrationale Funktionen 0. Grades (Rechteck-Verfahren) und 1. Grades (Trapez-Verfahren) approximiert.
Der Gedanke ist naheliegend, eine Approximation durch eine ganzrationale Funktion **p**, 2. Grades, durchzuführen und als Näherungswert für den Wert des Bestimmten Integrals von **f** über [a ; b] den Wert des Bestimmten Integrals von **p** über [a ; b] zu nehmen.

Nebenstehend skizziert ist der Fall der Approximation der **Sinus**funktion über [0 ; π] durch eine nach unten geöffnete Parabel. Den Funktionsterm von **p** mit **p**(x) = $c_2 \cdot x^2 + c_1 \cdot x + c_0$ bestimmt man durch 3 Bedingungen, nämlich dass die Funktionswerte von **f** und **p** an 3 Stellen übereinstimmen sollen: an den Rändern und in der Mitte des Intervalls.

1. Bestimme: $\int_0^{\pi} p(x)\,dx$ und vergleiche mit dem exakten Wert: $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$!

Das Problem soll nun allgemein gelöst werden, d.h. es ist eine allgemeine Beziehung für $\int_a^b p(x)\,dx$ gesucht.

Dafür sind die 3 Bedingungen zunächst in einem linearen Gleichungssystem zu beschreiben, daraus dann die Koeffizienten der Polynomfunktion zu bestimmen und über den erhaltenen Polynomfunktionsterm dann zu integrieren.

$$\left\{\begin{array}{rcccccc} & y_a & = & c_2\cdot a^2 & + & c_1\cdot a & + \; c_0 \\ \wedge & y_b & = & c_2\cdot b^2 & + & c_1\cdot b & + \; c_0 \\ \wedge & y_m & = & c_2\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 & + & c_1\cdot\left(\frac{a+b}{2}\right) & + \; c_0 \end{array}\right\}$$

2. Bestätige durch Lösung des linearen Gleichungssystems, dass die Koeffizienten der Polynomfunktion lauten:[1]

$$c_2 = \frac{2\cdot(y_a+y_b) - 4\cdot y_m}{(b-a)^2}\;; \qquad c_1 = \frac{4\cdot y_m\cdot(a+b) - y_b\cdot(b+3\cdot a) - y_a\cdot(a+3\cdot b)}{(b-a)^2}\;; \qquad c_0 = \frac{-4\cdot y_m\cdot a\cdot b + y_b\cdot(a^2+a\cdot b) + y_a\cdot(b^2+a\cdot b)}{(b-a)^2}$$

$$\Rightarrow \int_a^b p(x)\,dx = \frac{2\cdot(y_a+y_b) - 4\cdot y_m}{(b-a)^2}\cdot\frac{b^3-a^3}{3} + \frac{4\cdot y_m\cdot(a+b) - y_b\cdot(b+3\cdot a) - y_a\cdot(a+3\cdot b)}{(b-a)^2}\cdot\frac{b^2-a^2}{2} + \frac{-4\cdot y_m\cdot a\cdot b + y_b\cdot(a^2+a\cdot b) + y_a\cdot(b^2+a\cdot b)}{(b-a)}$$

[1] Was ich kann, könnt ihr schon lange! - Ruhe und Kondition (und ein wenig Rechentechnik) ist gefordert!

Zur Keplerschen Faßregel

Bestimmung von Näherungswerten Bestimmter Integrale durch Approximation von Funktionen durch Parabeln

Durch Kürzen von (b - a) in den ersten beiden Summanden und Zusammenfassen der Zähler auf dem Hauptnenner: 6 · (b - a) erhält man (nach endlich vielen Schritten):

$$\int_a^b p(x)\,dx = \left[\, y_a \cdot \left(b^2 - 2ab + a^2\right) + y_b \cdot \left(b^2 - 2ab + a^2\right) + y_m \cdot \left(4b^2 - 8ab + 4a^2\right) \right] \cdot \frac{1}{6 \cdot (b-a)}$$

$$= \left[\, f(a) \cdot (b-a)^2 + f(b) \cdot (b-a)^2 + 4 \cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) \cdot (b-a)^2 \,\right] \cdot \frac{1}{6 \cdot (b-a)}$$

$$= \frac{b-a}{6} \cdot \left[\, f(a) + 4 \cdot f\left(\tfrac{a+b}{2}\right) + f(b) \,\right] \approx \int_a^b f(x)\,dx$$

---

3. Bestätige: $\int_0^{\pi} \sin(x)\,dx = 2 \approx \frac{2 \cdot \pi}{3} \approx 2{,}0944$; $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln(2) \approx 0{,}6944$; $\int_0^2 \left(x^3 - 2 \cdot x + 3\right) dx = 6$!

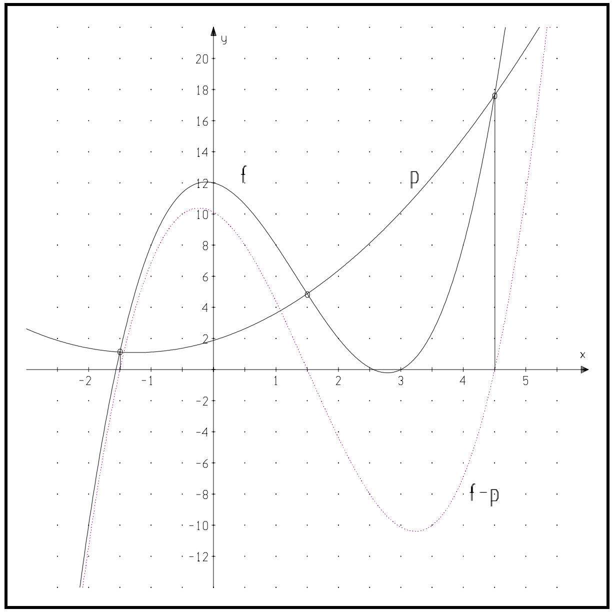
---

4. Beweise: Die Keplersche Faßregel ist bei der Integration ganzrationaler Funktionen vom Grad 3 exakt! -

Hilfe:
Begründe zunächst, dass der Beweis erbracht ist wenn gezeigt wurde, dass der Wert des Bestimmten Integrals über den Term der Differenzfunktion **f-p** Null ist.

Denke dir die y-Achse so verschoben, dass sie durch die mittlere Nullstelle der Differenzfunktion verläuft.
Wie könnte der Term der Differenzfunktion, bezogen auf das veränderte Koordinatensystem, wegen der Lage der Nullstellen nur lauten?!

Jetzt nur integrieren und schon fertig!?



Zur Keplerschen Faßregel

Bestimmung von Näherungswerten Bestimmter Integrale durch Approximation von Funktionen durch Parabeln

Nachtrag: Ein weiteres Mal: *Was der Mathematiker nicht hat, das holt (oder konstruiert) er sich!*[2]

Man kann bei der Bestimmung des Terms der ganzrationalen Funktion **p** auch ohne die langwierige Berechnung der Koeffizienten auskommen, wenn man die Bedingung der übereinstimmenden Funktionswerte an 3 Stellen geschickt zur Konstruktion des Funktionsterms nutzt. - Zur Schreibvereinfachung setzen wir für die halbe Intervalllänge (Schrittweite) den Buchstaben $d := \frac{1}{2}\cdot(b-a)$.

Damit muss gelten: (1) $\mathbf{p}(a) = \mathbf{f}(a) \;\wedge\;$ (2) $\mathbf{p}(a+d) = \mathbf{f}(a+d) \;\wedge\;$ (3) $\mathbf{p}(b) = \mathbf{f}(b)$

Damit (1) gilt wird gesetzt: $\mathbf{p}(x) = \mathbf{f}(a) + \mathbf{R_1}(x)$ mit $\mathbf{R_1}(a) = 0$.

Damit (2) gilt wird gesetzt: $\mathbf{p}(x) = \mathbf{f}(a) + (x-a)\cdot\frac{\mathbf{f}(a+d) - \mathbf{f}(a)}{d} + \mathbf{R_2}(x)$ mit $\mathbf{R_2}(a) = 0$ und $\mathbf{R_2}(a+d) = 0$.

Damit (3) gilt wird gesetzt: $\mathbf{p}(x) = \mathbf{f}(a) + (x-a)\cdot\frac{\mathbf{f}(a+d) - \mathbf{f}(a)}{d} + (x-a)\cdot(x-(a+d))\cdot\frac{\mathbf{f}(b) - 2\cdot\mathbf{f}(a+d) + \mathbf{f}(a)}{2\cdot d^2}$

---

5. Bestätige, dass der letzte Funktionsterm die geforderten Bedingungen erfüllt und berechne den Wert des Bestimmten Integrals in der Form mit der oberen Grenze a + 2·d:

$$\int_a^b \mathbf{p}(x)\cdot dx = \int_a^{a+2\cdot d} \mathbf{p}(x)\cdot dx$$

Bestätige die Keplersche Faßregel!

$$\ldots = \frac{2\cdot d}{6}\cdot\left(\mathbf{f}(a) + 4\cdot\mathbf{f}(a+d) + \mathbf{f}(b)\right)$$

---

[2] Idee von **Felix Günther**, Leistungskurs Mathematik MA-2(P) des Herder-Gymnasiums, 17. März 2006 - Bravo!