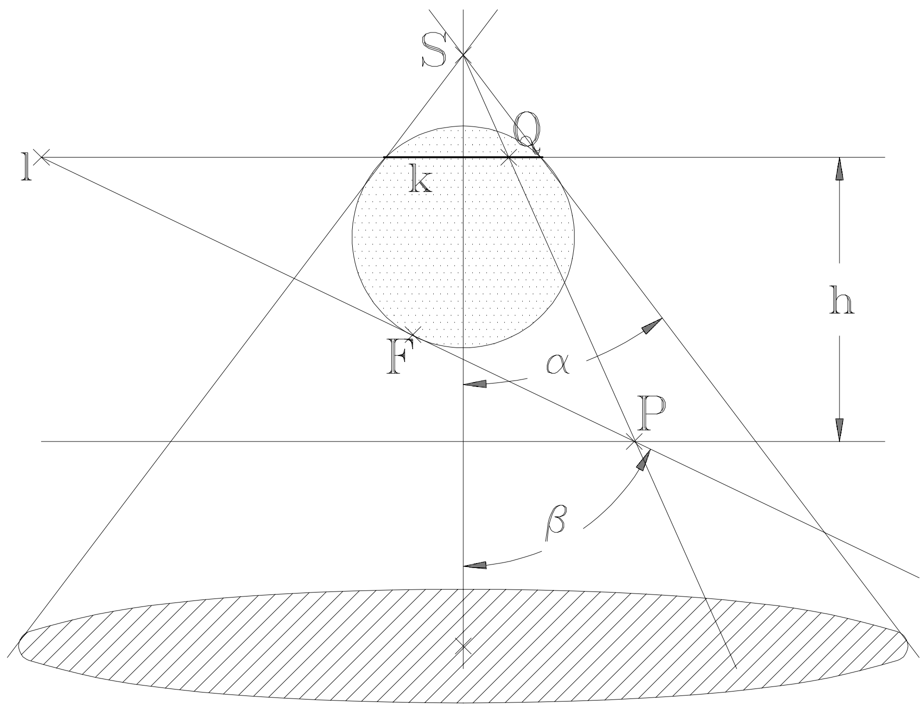
Zu den Kegelschnitten



Zum Skizzenverständnis:
In der nebenstehenden Figur[1] sieht man die den Kegel schneidende Ebene in Projektionsdarstellung als Gerade durch die Punkte **P** und **F**.
Mit eingezeichnet ist die obere Dandelinsche Kugel, die die Schnittebene im Punkt **F** berührt und mit dem Kegel einen Berührkreis **k** gemeinsam hat, der in der Projektionsdarstellung als Strecke auftaucht. Die Schnittkreisebene von **k** schneidet die Schnittebene der Kegelschnittsfigur in einer Geraden **l**, die in der Projektion wie ein Punkt erscheint.

Zur Definition der Kegelschnitte:

$\beta = 90°$	:	Kreis	
$\alpha < \beta$	:	Ellipse	(2 Dandelinsche Kugeln; nur eine links dargestellt)
$\alpha = \beta$	:	Parabel	(1 Dandelinsche Kugel)
$\alpha > \beta$	:	Hyperbel	(2 Dandelinsche Kugeln; Doppelkegel)

Zur numerischen Exzentrizität ε :
Legt man von einem beliebigen Kegelschnittspunkt **P** Tangenten an die Dandelinsche Kugel, so sind die Entfernungen von **P** zu den Berührpunkten stets gleich groß. Insbesondere gilt: $\overline{\mathbf{PF}} = \overline{\mathbf{PQ}}$, wobei **F** der Berührpunkt der Kugel mit der Schnittebene ist und **Q** der Punkt der zu **P** gehörenden Mantellinie des Kegels, der auf dem Berührkreis **k** liegt.[2]

Der Abstand **h** der Schnittkreisebene zur hierzu parallelen Ebene durch **P** läßt sich nun auf 2 Arten trigonometrisch berechnen: (1) $h = \overline{Pl} \cdot \cos(\beta)$ (2) $h = \overline{PQ} \cdot \cos(\alpha)$!

Mit $\overline{\mathbf{PF}} = \overline{\mathbf{PQ}}$ folgt:

$$\boxed{\overline{Pl} \cdot \cos(\beta) = \overline{PF} \cdot \cos(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{PF}}{\overline{Pl}} = \frac{\cos(\beta)}{\cos(\alpha)} =: \boldsymbol{\varepsilon}}$$

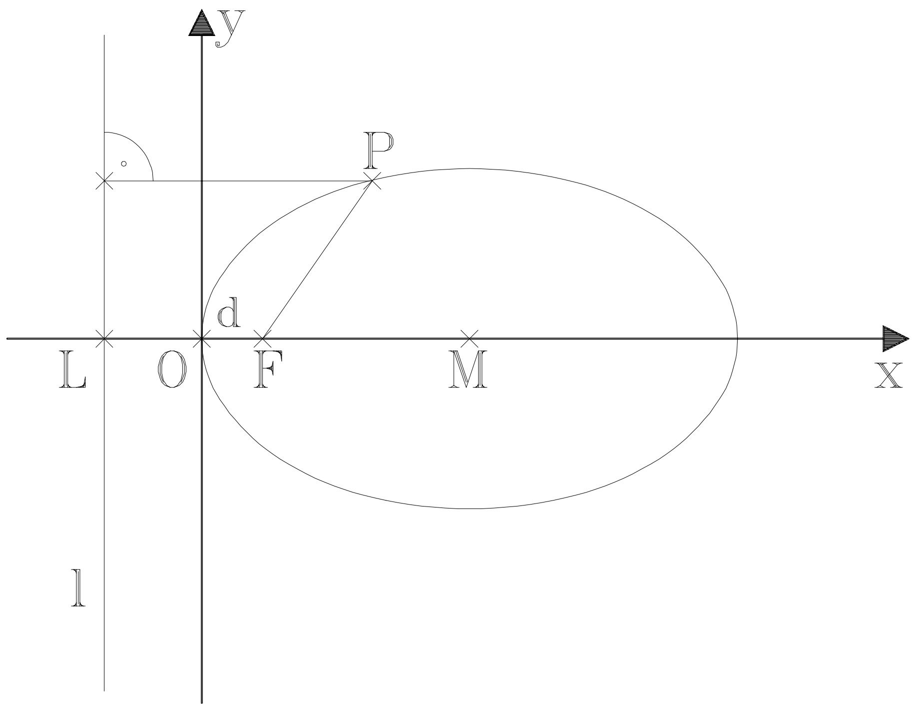
Es gilt demgemäß: Für einen Kreis ist $\varepsilon = 0$, für eine Ellipse $\varepsilon < 1$, für eine Parabel $\varepsilon = 1$, für eine Hyperbel $\varepsilon > 1$!

---

[1] Eigentlich eine graphische Vermischung von Projektionsdarstellung und perspektivischer Skizze (der ‘Grundkreis’ des Kegels müßte eigentlich auch als Strecke dargestellt werden); doch mit dieser kleinen Ungenauigkeit kann man sich, glaube ich, den Sachverhalt besser räumlich vorstellen!

[2] Argumentiert man hier für die Ellipse genauso mit der unteren Dandelinschen Kugel, nämlich daß der Abstand des Punktes **P** zum unteren Berührpunkt $\mathbf{F_2}$ genauso groß wie der Abstand zum Punkt $\mathbf{Q_2}$ der Mantellinie ist, der auf dem unteren Berührkreis $\mathbf{k_2}$ liegt, so folgt daraus, weil der Abstand der Berührkreise konstant ist, daß für jeden Ellipsenpunkt die Summe der Abstände zu den Berührpunkten (**F** und $\mathbf{F_2}$) der Dandelinschen Kugeln mit der Schnittebene konstant ist.

Zu den Kegelschnitten



Zum Skizzenverständnis:

In der nebenstehenden Figur gilt: $\frac{\overline{OF}}{\overline{OL}} = \frac{d}{\overline{OL}} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \overline{OL} = \frac{d}{\varepsilon}$

Die Gleichung der Leitlinie **l** lautet also: $\boxed{x = -\frac{d}{\varepsilon}}$.

Zur Scheitelpunktsgleichung der Kegelschnitte:

Es gilt: $\frac{\overline{PF}}{\overline{Pl}} = \frac{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}{\left(x + \frac{d}{\varepsilon}\right)} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = \varepsilon \cdot \left(x + \frac{d}{\varepsilon}\right)$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} (x-d)^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \cdot \left(x + \frac{d}{\varepsilon}\right)^2 \\ x^2 - 2dx + d^2 + y^2 &= \varepsilon^2 \cdot x^2 + 2\varepsilon dx + d^2 \\ y^2 &= 2d\cdot(\varepsilon+1)\cdot x - (1-\varepsilon^2)\cdot x^2 \end{aligned}$$

Mit **p** := d · (ε + 1) ergibt sich: $\boxed{y^2 = 2\cdot p\cdot x - (1 - \varepsilon^2) \cdot x^2}$.

p gibt die y-Koordinate für die x-Koordinate: x = d, das heißt in ‘Brennpunkthöhe’ an (Nachrechnen!). Insbesondere bedeutet dies, daß in ‘Brennpunkthöhe’ die Breite des Kegelschnittes 2·**p** beträgt. - Für die Parabel gilt speziell: $\varepsilon = 1 \Rightarrow d = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{2}}$, also ist der Abstand des Brennpunktes zur Leitlinie gerade **p**.

Zur Mittelpunktsgleichung von Ellipse und Hyperbel:

Ellipse und Hyperbel besitzen zwei Scheitel (y-Koordinate: 0), nämlich $x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{2\cdot p}{1-\varepsilon^2}$. Damit die Koordinaten des Mittelpunktes statt $\mathbf{M}\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2} \,\middle|\, 0\right)$ nun $\mathbf{M}(0 \mid 0)$ werden, ist eine Verschiebung des Kegelschnitts in Scheitelpunktsform um $-\frac{p}{1-\varepsilon^2}$ (=: - **a**) in x-Richtung durchzuführen. Für die kleine Halbachse **b** ergibt sich aus der Rechnung: $\mathbf{b} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$. (Nachrechnen!)

Aufgabe: Berechne die x-Koordinaten der Brennpunkte (x_{F1} =: -e ; x_{F2} =: e; e: lineare Exzentrizität) und bestätige, daß gilt: $\mathbf{a^2 = e^2 + b^2}$.

<u>Zu den Kegelschnitten</u>

<u>Lösungen der Aufgaben zur Mittelpunktsgleichung der Kegelschnitte ($\varepsilon \neq 1$):</u>

1) Scheitelpunktsgleichung: $y^2 = 2 \cdot p \cdot x - (1 - \varepsilon^2) \cdot x^2$. Es ist eine Verschiebung in x-Richtung um $-\frac{p}{1-\varepsilon^2}$ durchzuführen !

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} y^2 &= 2\cdot p\cdot\left(x+\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right) - (1-\varepsilon^2)\cdot\left(x+\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2 \\ y^2 &= 2\cdot p\cdot\left(x+\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right) - (1-\varepsilon^2)\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot\frac{p}{1-\varepsilon^2}+\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}\right) \\ y^2 &= 2\cdot p\cdot x + \frac{2\cdot p^2}{1-\varepsilon^2} - (1-\varepsilon^2)\cdot x^2 - 2\cdot p\cdot x - \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} \end{aligned}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} y^2 + (1-\varepsilon^2)\cdot x^2 &= \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} \\ \frac{(1-\varepsilon^2)\cdot x^2}{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1-\varepsilon^2}} &= 1 \\ \frac{x^2}{\left(\frac{p}{1-\varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2} &= 1 \end{aligned}} \; !$$

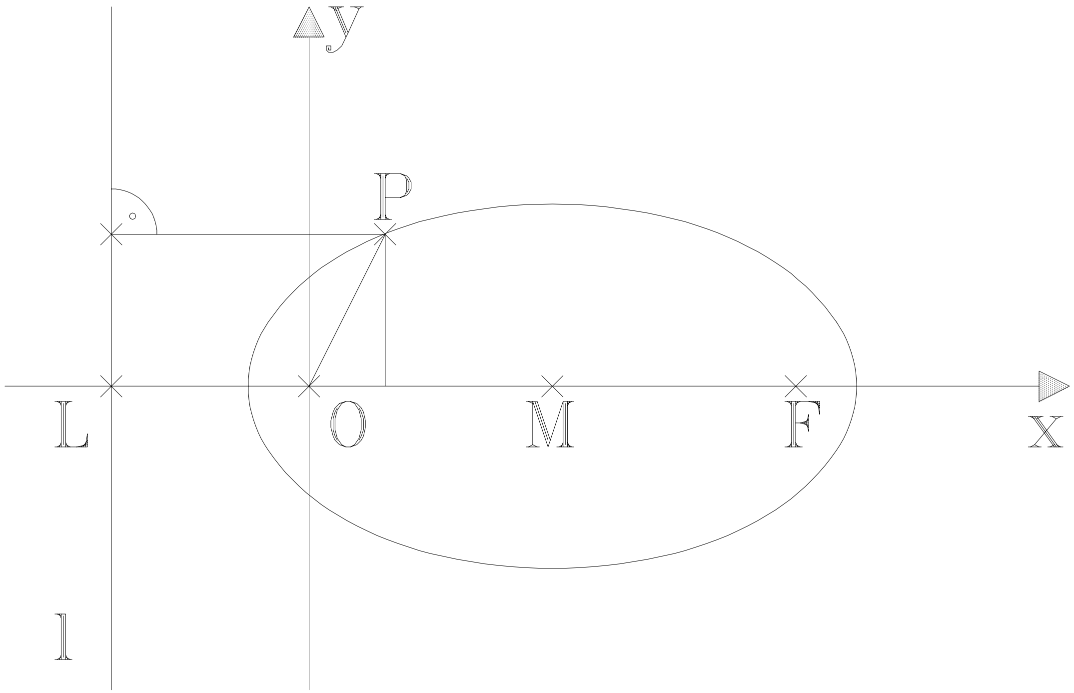
Im letzten Umformungsschritt wird eigentlich vorausgesetzt: $\varepsilon < 1$, d.h. der Fall der Ellipse oder des Kreises! - Bitte (als gute Übung) selber noch einmal die Veränderung der Umformungsschritte und der Endgleichung für den Fall der Hyperbel mit $\varepsilon > 1$ ansehen.

---

2) Die (negative) x-Koordinate des Brennpunktes eines Kegelschnittes ist nun: $-\frac{p}{1-\varepsilon^2} + d = -\frac{p}{1-\varepsilon^2} + \frac{p}{\varepsilon+1} = \frac{p\cdot(1-\varepsilon) - p}{1-\varepsilon^2} = -\varepsilon\cdot\frac{p}{1-\varepsilon^2} =: -\mathbf{e} = -\varepsilon\cdot a$.

Es gilt: $\mathbf{b}^2 + \mathbf{e}^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2\cdot p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{p^2\cdot(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2)^2} + \frac{\varepsilon^2\cdot p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2} = \mathbf{a}^2$!

Zu den Kegelschnitten



Zur Polargleichung der Kegelschnitte (in Polarkoordinaten):

Es gilt:

$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\overline{PO}}{\overline{Pl}} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \overline{Pl} = \dfrac{r}{\varepsilon} \\[2ex] \overline{LO} = \dfrac{d}{\varepsilon} + d \quad \Rightarrow \quad \overline{LO} = \dfrac{p}{\varepsilon} \end{array}}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{array}{l} r \cdot \cos(\varphi) + \dfrac{p}{\varepsilon} = \dfrac{r}{\varepsilon} \\[2ex] \dfrac{r}{\varepsilon} - r \cdot \cos(\varphi) = \dfrac{p}{\varepsilon} \\[2ex] \Rightarrow \quad r = \dfrac{\dfrac{p}{\varepsilon}}{\dfrac{1}{\varepsilon} - \cos(\varphi)} \\[3ex] \mathbf{r} = \dfrac{\mathbf{p}}{\mathbf{1 - \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \cos(\boldsymbol{\varphi})}} \end{array}}$$