Eine Integration von größerer Komplexität
(Was man kann ist einfach, was man nicht kann ist schwer)

In der Zeitschrift: „Der Mathematikunterricht“ (Heft 1; 1993; Seite 4) stand folgende Integrationsaufgabe:

$$\mathbf{I} := \frac{1184}{\pi} \cdot \int_0^{\infty} \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Der Vorfaktor und die uneigentliche Integration sollen uns zunächst einmal nicht interessieren, sondern wir wollen versuchen, einen geeigneten Stammfunktionsterm zu finden.

Der Term: $1 + x^2$ im Nenner erinnert uns ein wenig an die Funktion arctan, und so wollen wir es zunächst einmal mit einer Substitution: $x = \tan(z)$ versuchen. - Falls das nicht zum Ziel führt, können wir ja eventuell mit Partialbruchzerlegung vereinfachen.

Also: $$x = \tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dz} = \frac{1}{\left(\cos(z)\right)^2}$$

Damit ergibt sich bei der uneigentlichen Integration (unter vorläufigem Verzicht auf Integrationskonstanten):

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\left(1+x^2\right)^3} &= \int \frac{dz}{\cos^2(z) \cdot \left(1+\tan^2(z)\right)^3} \\
&= \int \frac{dz}{\cos^2(z) \cdot \left(1 + \frac{\sin^2(z)}{\cos^2(z)}\right)^3} \\
&= \int \frac{dz}{\cos^2(z) \cdot \left(\frac{\cos^2(z)+\sin^2(z)}{\cos^2(z)}\right)^3} \\
&= \int \frac{dz}{\cos^2(z) \cdot \frac{1}{\cos^6(z)}} = \int \cos^4(z)\ dz
\end{aligned}$$

Damit hat die Aufgabe jedoch schon ihren Schrecken verloren, denn schließlich beherrschen wir ja die Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen! - Jetzt ist nur noch Kondition gefordert!

Bekanntlich gilt:

$$\cos(z+z) = \cos(2\cdot z) = \cos^2(z) - \sin^2(z) = \cos^2(z) - \left(1-\sin^2(z)\right) = 2\cdot\cos^2(z) - 1.$$

Damit ergibt sich:

$$\cos^4(z) = \left(\frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot z) + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\cdot\cos^2(2\cdot z) + \frac{1}{2}\cdot\cos(2\cdot z) + \frac{1}{4}$$

Eine Integration von größerer Komplexität
(Was man kann ist einfach, was man nicht kann ist schwer)

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \int \cos^4(z)\ dz$$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{4}\cdot\int \cos^2(2\cdot z)\ dz + \frac{1}{2}\cdot\int \cos(2\cdot z)\ dz + \frac{1}{4}\cdot\int dz$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\int \frac{\cos(4\cdot z)+1}{2}\ dz + \frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot z) + \frac{1}{4}\cdot z$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\cdot\sin(4\cdot z) + \frac{1}{8}\cdot z + \frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot z) + \frac{1}{4}\cdot z$$

$$= \frac{1}{32}\cdot\sin(4\cdot z) + \frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot z) + \frac{3}{8}\cdot z$$

Nun muß rückwärts substituiert werden!

Es war: $\quad x = \tan(z) = \dfrac{\sin(z)}{\cos(z)} \quad\Leftrightarrow\quad z = \arctan(x)\ ;\quad \sin(2\cdot z) = 2\cdot\sin(z)\cdot\cos(z)$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{4}\cdot\sin(2\cdot z) = \frac{1}{2}\cdot(x\cdot\cos(z))\cdot\cos(z) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\cos^2(z) = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\frac{1}{\tan^2(z)+1} = \frac{x}{2\cdot(x^2+1)}\ .$$

<u>Entsprechend:</u>

$$\frac{1}{32}\cdot\sin(4\cdot z) = \frac{1}{32}\cdot 2\cdot\sin(2\cdot z)\cdot\cos(2\cdot z)$$

$$= \frac{1}{16}\cdot 2\cdot\sin(z)\cdot\cos(z)\cdot\left(2\cdot\cos^2(z)-1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(x\cdot\cos^2(z)\right)\cdot\left(2\cdot\cos^2(z)-1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\left(x\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{x^2+1}-1\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{x}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{8}\cdot\frac{x}{x^2+1}$$

Damit haben wir den Funktionsterm einer Stammfunktion gefunden:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \int \cos^4(z)\ dz = \frac{x}{4\cdot(x^2+1)^2} + \frac{3\cdot x}{8\cdot(x^2+1)} + \frac{3}{8}\cdot\arctan(x)$$

Nun zurück zur Bestimmten Integration ; wir erinnern uns:

$$\mathbf{I} := \frac{1184}{\pi}\cdot\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3} = \frac{1184}{\pi}\cdot\lim_{a\to\infty}\left[\int_0^a \frac{dx}{(1+x^2)^3}\right]$$

Eine Integration von größerer Komplexität
(Was man kann ist einfach, was man nicht kann ist schwer)

$$\Longrightarrow \quad \mathbf{I} = \frac{1184}{\pi} \cdot \lim_{a \to \infty} \left[\frac{x}{4\cdot\left(x^2+1\right)^2} + \frac{3\cdot x}{8\cdot\left(x^2+1\right)} + \frac{3}{8}\cdot\arctan(x) \right]_0^a$$

$$= \frac{1184}{\pi} \cdot \lim_{a \to \infty} \left[\frac{a}{4\cdot\left(a^2+1\right)^2} + \frac{3\cdot a}{8\cdot\left(a^2+1\right)} + \frac{3}{8}\cdot\arctan(a) - 0 \right]$$

$$= \frac{1184}{\pi}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = 222$$

Wer hätte an so etwas zu Beginn gedacht?!