Integration der "Normalhyperbel" **($x^2 - y^2 = 1$)**

$$\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx = \int_a^b 1\cdot\sqrt{x^2-1}\,dx = \left[x\cdot\sqrt{x^2-1}\right]_a^b - \int_a^b x\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \left[x\cdot\sqrt{x^2-1}\right]_a^b - \int_a^b \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

Scheinbar wurde durch die partielle Integration (mit einem Trick, den man sich merken sollte) nichts gewonnen, doch wird man sehen, wie uns eine wohl kaum weniger trickreiche Substitution zum Ziel führt. - Aber zuerst wird umgeformt:

$$\int_a^b \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_a^b \frac{x^2-1+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \int_a^b \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

$$= \int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

Setzt man in die obige Gleichung ein, so erhält man:

$$\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[x\cdot\sqrt{x^2-1}\right]_a^b - \left[\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx + \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx\right]$$

Damit folgt: $$2\cdot\int_a^b \sqrt{x^2-1}\,dx = \left[x\cdot\sqrt{x^2-1}\right]_a^b - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$$

Eigentlich hat man nicht das Gefühl, etwas gewonnen zu haben, oder?

Dem letzten Integral rückt man nun mit einer zunächst abstrusen Substitution auf die Pelle!

$$z = x + \sqrt{x^2-1}$$

$$z - x = \sqrt{x^2-1}$$

$$z^2 - 2\cdot z\cdot x + x^2 = x^2 - 1$$

$$2\cdot z\cdot x = z^2 + 1$$

$$x = \frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

Integration der "Normalhyperbel" **(x^2 - y^2 = 1)**

Aus $z - x = \sqrt{x^2 - 1}$ folgt dann:

$$\sqrt{x^2 - 1} = z - \frac{1}{2}\cdot\left(z + \frac{1}{z}\right)$$
$$= \frac{z^2 - 1}{2\cdot z}$$

und somit:

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2\cdot z}{z^2 - 1}}$$

Für die Differentiale dx und dz gilt:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - \frac{1}{z^2}\right) = \frac{z^2 - 1}{2\cdot z^2} \quad \Leftrightarrow \quad dx = \frac{z^2 - 1}{2\cdot z^2}\, dz$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^b \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx = \int_{x=a}^{x=b} \frac{2\cdot z}{z^2 - 1} \cdot \frac{z^2 - 1}{2\cdot z^2}\,dz = \int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{z}\,dz$$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\boxed{\int_a^b \sqrt{x^2 - 1}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \left[x\cdot\sqrt{x^2 - 1}\right]_a^b - \frac{1}{2} \cdot \int_{a+\sqrt{a^2-1}}^{b+\sqrt{b^2-1}} \frac{1}{z}\,dz}$$

Anmerkung: Daß am Ende das Integral $\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{z}\,dz$ auftaucht ist vielleicht dann nicht verwunderlich, wenn man daran denkt, daß die Hyperbel mit der Gleichung: $x^2 - y^2 = 1$ aus einer Drehung (um $\overline{\delta} = -45°$) der Funktion $\mathbf{f}$ mit $\mathbf{f}(x) = \frac{1}{x}$ entsteht !

Integration der "Normalhyperbel" **(x^2 - y^2 = 1)**

Einige Aufgaben und Folgerungen:

Es gilt: $\mathbf{cosh}(x) := \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$; $\mathbf{sinh}(x) := \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$.

1.) Gib die Terme der ersten vier Ableitungen von **sin**, **cos**, **sinh**, und **cosh** an!

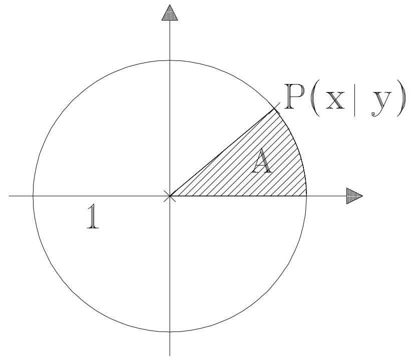
2.) Beweise: $\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} \left[\left(\cosh(x) \right)^2 - \left(\sinh(x) \right)^2 = 1 \right].$

3.) Zeige, dass der Kreissektor **A** am Einheitskreis den Inhalt:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot x_\alpha$$

hat, wenn x_α das Bogenmaß des zum Kreissektor gehörenden Zentriwinkels α ist. - Der Punkt P hat somit die Koordinaten:

$$\mathbf{P}\left(\cos(2 \cdot A) \mid \sin(2 \cdot A) \right)$$



4.) Wenn hier nun **A** der Inhalt der Fläche ist, die von der x-Achse, der Ursprungsgeraden durch einen Hyperbelpunkt und die Hyperbel begrenzt wird, so gilt:

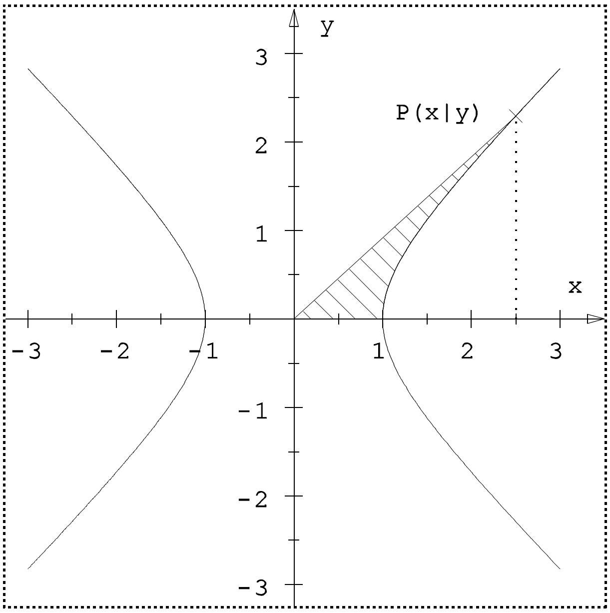
$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y - \int_1^x \sqrt{t^2 - 1}\, dt$$

Weise nun unter Verwendung des Stammfunktionsterms für die Normalhyperbel die Gültigkeit der folgenden Gleichungen nach:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$e^{2 \cdot A} = x + \sqrt{x^2 - 1} \ ; \quad e^{-2 \cdot A} = x - \sqrt{x^2 - 1}$$

$$x = \mathbf{cosh}(2 \cdot A) \ ; \quad y = \mathbf{sinh}(2 \cdot A)$$



Damit wird sicherlich verständlich, warum die oben definierten Funktionen <u>**hyperbolischer**</u> Sinus bzw Kosinus heißen !