Hauptsatz der Analysis
oder - man kann auch Flächeninhalte funktionalisieren!

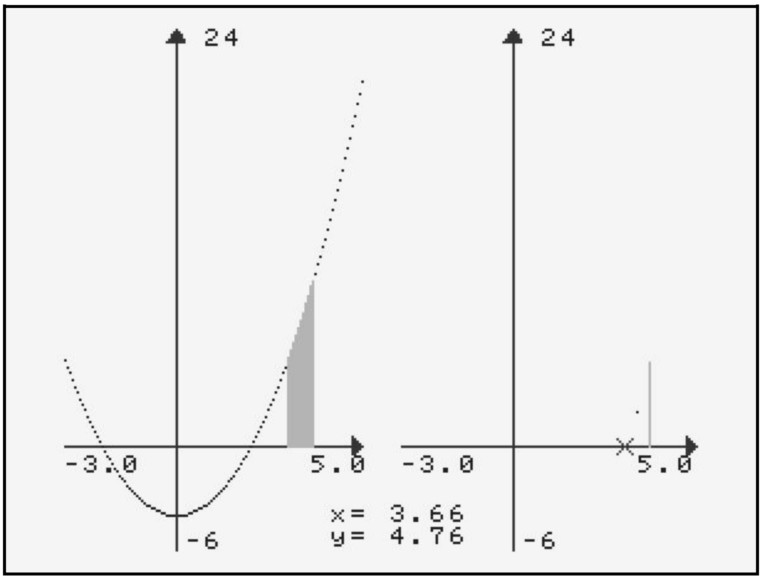
Sucht man das lokale Wachstum einer Funktion **f** an einer Stelle $\mathbf{x_0}$ ihrer Definitionsmenge, so muss man bekanntlich den Grenzwert einer geeigneten Differenzenquotientenfolge bestimmen (eindeutige Existenz, d.h. Differenzierbarkeit sei vorausgesetzt). - Ein i.a. mühsames Verfahren.

Globalisiert man nun diese Eigenschaft durch Funktionalisieren, d.h. man konstruiert eine neue Funktion, die einer Stelle $\mathbf{x_0}$ gerade das lokale Wachstum der Funktion **f** an dieser Stelle zuordnet, so erhält man bekanntlich im kartesischen Koordinatensystem den Graphen der Ableitungsfunktion **f ′**. - Wenn man nun den Funktionsterm von **f ′** kennt, dann kann man sich das mühsame Verfahren mit der Differenzenquotientenfolge sparen, denn man muss ja nur in den Ableitungsfunktionsterm die Stelle $\mathbf{x_0}$ einsetzen um das lokale Wachstum von **f** an dieser Stelle zu bestimmen!

Funktionalisieren - eine fundamentale Idee der Mathematik

Es soll sich nun darum drehen, orientierte Flächeninhalte, verstanden als Grenzwerte einer geeigneten Riemann-Summation (eindeutige Existenz, d.h. Integrierbarkeit sei vorausgesetzt), zu funktionalisieren. Dies bedeutet, dass man einer Stelle **x** den orientierten Flächeninhalt, d.h. den Wert eines bestimmten Integrals zuordnet. Da der Wert eines bestimmten Integrals neben dem Funktionsterm abhängt von 2 Stellen, nämlich der unteren und der oberen Grenze (der linken und rechten Intervallgrenze), so muss man bei der Zuordnung eine Stelle konstant halten. Wir bilden folgende Zuordnungsvorschrift:

$$\mathbf{F_a} : x \mapsto y = \mathbf{F_a}(x) := \int_a^x f(t)\cdot dt$$



und nennen $\mathbf{F_a}$ Integralfunktion von **f** zur unteren Grenze **a**.

[a) Um Verwechslungen der Variablen zu vermeiden, wird die Abszisse im Diagramm der Funktion **f**: t-Achse genannt.
b) $\mathbf{F_a}$ ist wohldefiniert, wenn **f** “vernünftig” (stetig) ist, d.h. für <u>alle</u> Folgen auf der t-Achse mit dem Grenzwert x konvergiert die zugehörige Funktionswertfolge und der existierende (eindeutige) Grenzwert ist immer **f**(x)]

Im linken Diagramm des dargestellten Beispiel gilt: $\mathbf{f}(t) = t^2 - 4$
und $\mathbf{a} = 3$.

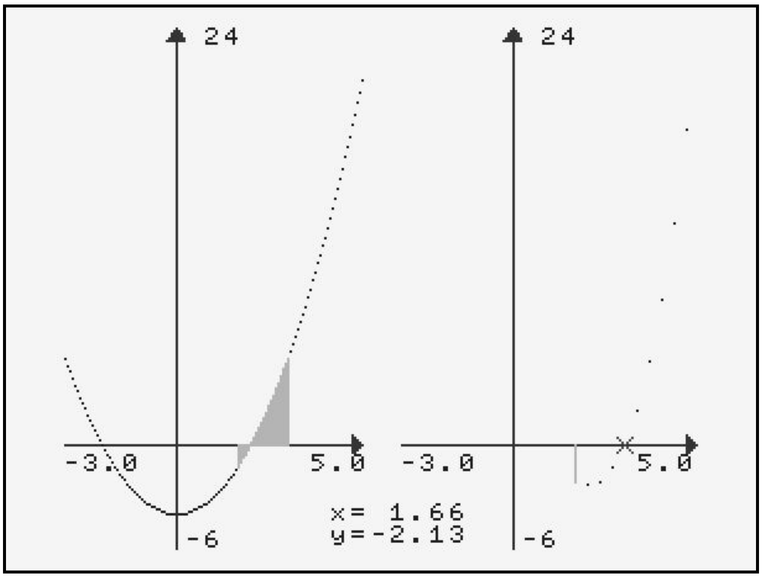
Jeweils rechts wurden schon einige Funktionswerte von $\mathbf{F_3}$ eingetragen, z.B. ist der gekennzeichnete Flächeninhalt links:

$$\int_3^{\frac{11}{3}} (t^2-4)\cdot dt \approx 4{,}76 \approx \mathbf{F_3}\left(\frac{11}{3}\right)$$

<u>Aufgaben:</u>

1) Begründe: $\mathbf{F_a}(a) = 0$.

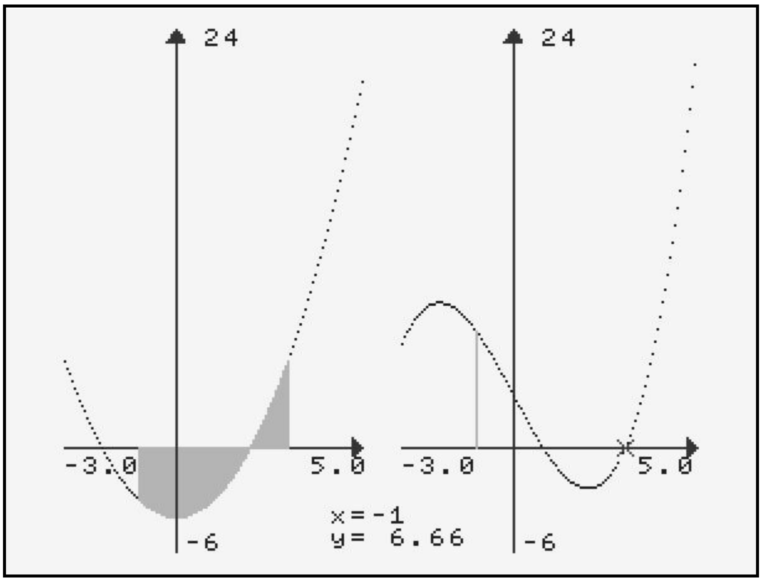
2) Nach Funktionswertbestimmung (mit der Schrittweite $0,\overline{3}$) rechts von 3 hat das Computerprogramm in der 2. Graphik begonnen, Funktionswerte links von 3 zu bestimmen. - Skizziere den begonnenen Graph zu Ende. Welche Bedeutung haben die Nullstellen von **f** (linkes Diagramm) für $\mathbf{F_3}$ (rechtes Diagramm)? - Welche Bedeutung hat das relative Minimum von **f** für $\mathbf{F_3}$?



Hauptsatz der Analysis
oder - man kann auch Flächeninhalte funktionalisieren!

Der gekennzeichnete orientierte Flächeninhalt entspricht $\int_3^{-1} (t^2-4)\cdot dt$.

3) Bestätige: $\mathbf{F_3}(-1) = \frac{20}{3}$.



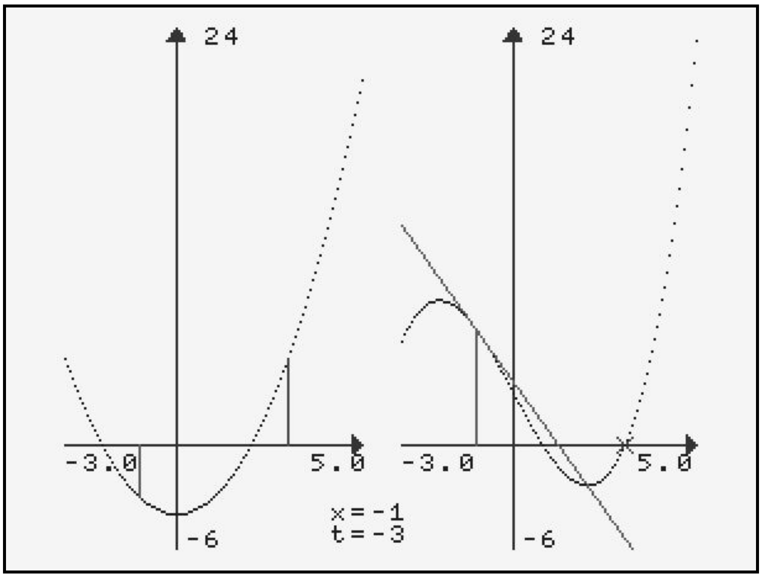
Auf dem Weg nach links, ausgehend von der Stelle 3, wird der Flächenzuwachs pro Schrittweite nun kleiner (Tendenzwende bei 0), aber bis zur Nullstelle -2 ist noch Zuwachs vorhanden.

Der Graph von $\mathbf{F_3}$ sieht offensichtlich so aus, dass gilt: $\mathbf{F_3'} = \mathbf{f}$

<u>Definition:</u> Eine Funktion **F** mit **F** ′ = **f** heißt Stammfunktion von **f**.

Damit liegt folgender Satz nahe (1. Teil des Hauptsatzes):

*Wenn **f** stetig ist, dann ist jede Integralfunktion $\boldsymbol{F_a}$ von **f** auch Stammfunktion von **f**.*[1]



Die beiden graphischen Darstellungen verdeutlichen noch einmal den Sachverhalt:

Links	Rechts
Flächeninhalt	Funktionswert
Funktionswert	Steigung der Tangente

4) Erläutere die einzelnen Rechenschritte zur Bestimmung von $\mathbf{F_3}'(-1)$. Nimm insbesondere Stellung zu der Frage, in welchem Diagramm man sich befindet.
Interpretiere die Zähler der Brüche in der 2., 3. und 4. Zeile geometrisch. (Von der 3. zur 4. Zeile wird der Mittelwertsatz der Integralrechnung benutzt, dass sich jeder Wert eines bestimmten Integrals interpretieren läßt als der Flächeninhalt eines geeigneten Rechtecks - "Breite h × mittlerer Funktionswert" - $0 \le \delta \le 1$)

$$\begin{aligned}
F_3'(-1) &= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{F_3}(-1+h) - \mathbf{F_3}(-1)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_3^{-1+h} (t^2-4)\cdot dt - \int_3^{-1} (t^2-4)\cdot dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\int_{-1}^{-1+h} (t^2-4)\cdot dt}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\mathbf{f}(-1+\delta\cdot h)\cdot h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \mathbf{f}(-1+\delta\cdot h) \\
&= \mathbf{f}(-1)
\end{aligned}$$

5) Zeige am Beispiel: $\mathbf{f}(x) = 2x$; $\mathbf{F}(x) = x^2 + 1$, dass die Umkehrung des 1. Teiles des Hauptsatzes der Analysis:

*Wenn **F** Stammfunktion von **f** ist, dann ist **F** auch Integralfunktion von **f***

falsch ist. - Das liegt an einer Besonderheit von Integralfunktionen - Welcher?

[1] Definitionsmenge geeignet gewählt.

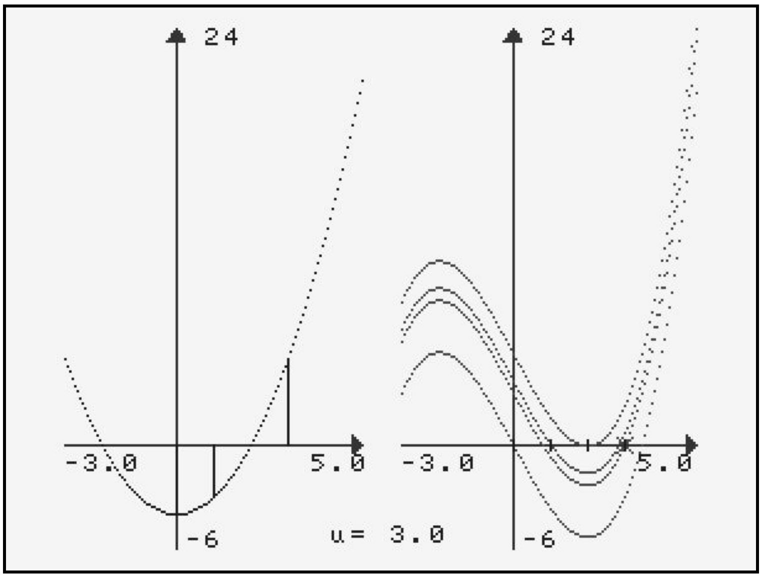
Hauptsatz der Analysis
oder - man kann auch Flächeninhalte funktionalisieren!

Die vorherigen Beweisschritte sind natürlich für alle Stellen aus der Definitionsmenge **x** ≠ -1 genau so richtig, d.h. es gilt:

$$\mathbf{F}_3'(x) = \mathbf{f}(x) \,.$$

6) Der Funktionsterm von $\mathbf{F}_3$ kann damit nur folgendes Aussehen haben: $\mathbf{F}_3(x) = \frac{1}{3}\cdot x^3 - 4\cdot x + C$,
wobei C eine Konstante ist. - Bestimme C aus der Tatsache, dass $\mathbf{F}_3$ die Stelle 3 als Nullstelle besitzt.

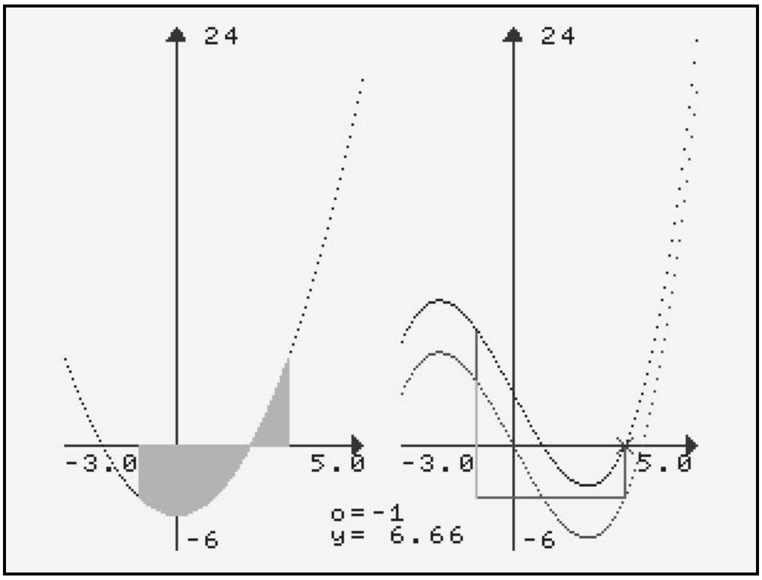
Der Funktionsterm verschiedener Integralfunktionen unterscheidet sich nur durch eine andere Konstante C, ihr Graph ist nur in y-Richtung gegeneinander verschoben.



Es gilt z.B.:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1(x) &= \int_1^x f(t)\cdot dt \\ &= \int_1^3 f(t)\cdot dt + \int_3^x f(t)\cdot dt \\ &= \mathbf{F}_3(x) + \int_1^3 f(t)\cdot dt\end{aligned}$$

7) Berechne die Größe der Verschiebung C der Graphen von $\mathbf{F}_0$ und $\mathbf{F}_3$ gegeneinander. - Entscheide begründet, welche Integralfunktionen im obigen Diagramm dargestellt sind. Überprüfe die Entscheidung durch Berechnung der Verschiebungskonstanten C gegenüber $\mathbf{F}_0$.



$\mathbf{F}_0$ hat gegenüber anderen Integralfunktionen den Vorteil, dass der Graph durch den Ursprung verläuft, die Konstante C im Funktionsterm ist 0.

8) Begründe die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_3(-1) &= \\ &= \int_3^{-1} (t^2 - 4)\cdot dt \\ &= \mathbf{F}_0(-1) - \mathbf{F}_0(3) \\ &= \left[\frac{1}{3}\cdot(-1)^3 - 4\cdot(-1)\right] - \left[\frac{1}{3}\cdot 3^3 - 4\cdot 3\right] \\ &= \left.\frac{1}{3}\cdot x^3 - 4\cdot x\,\right]_3^{-1}\end{aligned}$$

Kennzeichne im rechten Diagramm den obigen Wert als Streckenlänge einmal unter Verwendung von $\mathbf{F}_3$, einmal unter Verwendung von $\mathbf{F}_0$.

<u>2. Teil des Hauptsatzes der Analysis:</u> $\int_a^b \mathbf{f}(x)\cdot dx = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a)$ (**F** : beliebige Stammfunktion)

9) Üblicherweise nimmt man für **F** : $\mathbf{F}_0$. - Begründe, warum auch andere Stammfunktionen dasselbe leisten.

Hauptsatz der Analysis
oder - man kann auch Flächeninhalte funktionalisieren!

Nun noch eine letzte Anmerkung (nur für Leistungskursschüler). - Integrierbarkeit einer Funktion **f** (d.h. Grenzwertbildung z.B. über eine geeignete Riemannsumme - linkes Diagramm) und Existenz einer Stammfunktion (d.h. Umkehrung der Differentiation - rechtes Diagramm), sind mathematisch-strategisch völlig unterschiedliche Begriffsbildungen.
Der Hauptsatz der Analysis besagt, dass beide Wege der Berechnung eines bestimmten Integrales auf dasselbe herauskommen, wenn **f** stetig ist.

10) Zeige am Beispiel:

a) **f** mit $\mathbf{f}(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } x \le 0 \\ 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$ ist über [-3 ; 3] integrierbar, besitzt jedoch keine Stammfunktion.

b) **F** mit $\mathbf{F}(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x^4}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$ besitzt die Stammfunktionseigenschaft, d.h. ist überall differenzierbar, die Ableitungsfunktion **f** ist jedoch über [-3 ; 3] nicht integrierbar.