Wahrscheinlichkeit bei Vorinformationen

Bedingte Wahrscheinlichkeit / Stochastische Unabhängigkeit

Wir nehmen uns ein normales Skatspiel, bestehend aus 32 Karten, und führen das Zufallsexperiment durch: „Ziehen einer Skatkarte“.

Betrachtet man das Merkmal **SB** (Schwarzes Bild), so wird man unter der Laplace-Annahme, dass alle Karten „gleich“ sind, als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses **SB** angeben: $P(\mathbf{SB}) := \frac{6}{32}$.

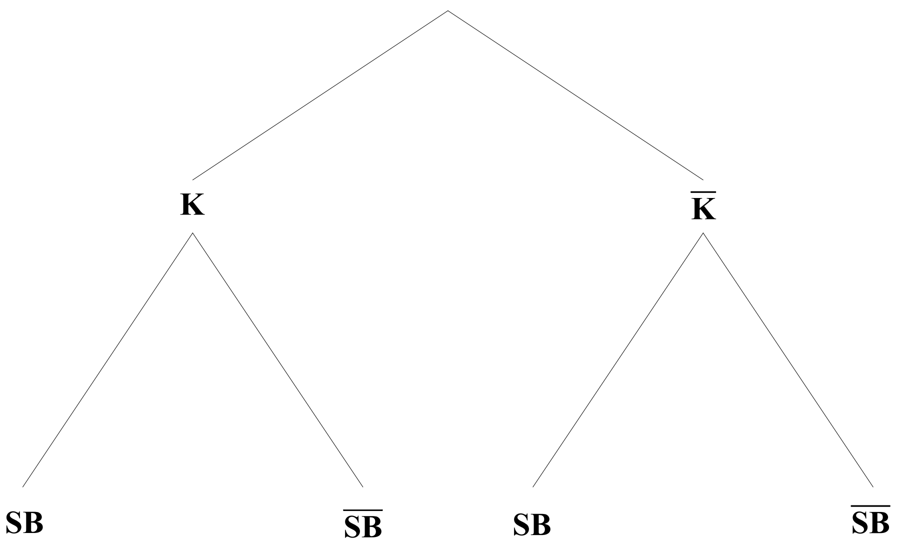
Wenn das Kartenspiel nun gezinkt ist, so dass man zunächst erkennt, ob die gezogene Karte eine Kreuzkarte ist, d.h. dass das Merkmal **K** eingetreten ist, so wird man unter dieser Vorinformation die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses **SB** anders angeben, da man ja gedanklich nicht mehr 32 Karten sondern nur noch die 8 Kreuzkarten in Erwägung zieht. Also wird man setzen: $P_{\mathbf{K}}(\mathbf{SB}) := \frac{3}{8}$.

Eine Vierfeldertafel verdeutlicht den Sachverhalt:

	K	$\overline{\mathbf{K}}$	
SB	3	3	6
$\overline{\mathbf{SB}}$	5	21	26
	8	24	32

Die Vorinformation führt also zu einer Einschränkung der Grundgesamtheit. $P_{\mathbf{K}}$ heißt: „Bedingtes Wahrscheinlichkeitsmaß unter der Bedingung **K**“.

Lies aus der Vierfeldertafel $P_{\overline{\mathbf{K}}}(\overline{\mathbf{SB}})$ und $P_{\mathbf{SB}}(\mathbf{K})$ ab und beschrifte im unteren Baumdiagramm die Äste mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten in formaler und zahlenmäßiger Weise!



Bestimme im Baumdiagramm: P(**SB**) und P(**K** ∩ **SB**)! - Bilde nun den Quotienten: $\frac{P(\mathbf{K} \cap \mathbf{SB})}{P(\mathbf{SB})}$ und entscheide durch Vergleich mit der Vierfeldertafel, um welche Wahrscheinlichkeit es sich handelt.

Wahrscheinlichkeit bei Vorinformationen

Bedingte Wahrscheinlichkeit / Stochastische Unabhängigkeit

Wir ändern nun unser Zufallsexperiment in Bezug auf das betrachtete Merkmal; wir interessieren uns nun für das Merkmal **B** (Bube). Wiederum unter der Laplace-Annahme, dass alle Karten „gleich“ sind, wird man als Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses **B** angeben: $P(\mathbf{B}) := \frac{4}{32}$.

Wenn das Kartenspiel nun gezinkt ist, so dass man zunächst erkennt, ob die gezogene Karte eine Kreuzkarte ist, d.h. dass das Merkmal **K** eingetreten ist, so wird man unter dieser Vorinformation die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses **B** das Bedingte Wahrscheinlichkeitsmaß: $P_{\mathbf{K}}(\mathbf{B}) := \frac{1}{8} = \frac{4}{32}$ angeben.

Eine Vierfeldertafel verdeutlicht den Sachverhalt:

	K	$\overline{\mathbf{K}}$	
B	1	3	4
$\overline{\mathbf{B}}$	7	21	28
	8	24	32

Die durch die Vorinformation bedingte Einschränkung der Grundgesamtheit hat also hier zu keiner Veränderung der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis **B** geführt, da die Einschränkung in <u>proportionaler</u> Weise erfolgte: $\frac{|\mathbf{B}|}{|\Omega|} = \frac{|\mathbf{B} \cap \mathbf{K}|}{|\mathbf{K}|}$

Da die Bedingung zu keiner Änderung des Wahrscheinlichkeitsmaßes führte ($P(\mathbf{B}) = P_{\mathbf{K}}(\mathbf{B})$) heißen die Ereignisse **B** und **K** stochastisch unabhängig.

---

a) Übertrage den Sachverhalt in ein entsprechendes Baumdiagramm und erläutere, wie man stochastische Unabhängigkeit in dieser Darstellung erkennt.

b) Zeige am obigen Beispiel: Auch die Ereignisse **B** und $\overline{\mathbf{K}}$ sind stochastisch unabhängig.

c) Beweise allgemein: Wenn die Ereignisse **A** und **B** stochastisch unabhängig sind, so sind auch die Ereignisse **A** und $\overline{\mathbf{B}}$ stochastisch unabhängig.
(Hinweis: Verwende die disjunkte Zerlegung: $\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cap \mathbf{B}) \cup (\mathbf{A} \cap \overline{\mathbf{B}})$ in unvereinbare Ereignisse.)