Wer kennt den Stammfunktionsterm?

Bekanntlich ist das Integral: $\int_{-1}^{4} \frac{1}{x^2}\,dx$ nicht definiert, da die Integration über die Definitionslücke nicht möglich ist.

Addiert man im Nenner des Integrandenfunktionsterms einfach eine 1, so entsteht sicher ein wohldefinierter Ausdruck, d.h. der Wert des Bestimmten Integrals muß aus Existenz- und Stetigkeitsgründen über dem gesamten Intervall bestimmbar sein (Hauptsatz der Analysis)!

$$\mathbf{I} := \int_{-1}^{4} \frac{1}{x^2+1}\,dx = F(4) - F(-1)$$

So einfach ist allerdings ein Stammfunktionsterm nicht zu finden!

Mit Hilfe eines Computerprogramms[1], das Grenzwerte von Folgen von Riemannsummen über ausgezeichneten Zerlegungsfolgen näherungsweise berechnen kann, wurden auf Blatt 2 die Wertetabellen für die Integralfunktion F_0 bestimmt.

1) Begründen Sie: F_0 ist streng monoton wachsend und punktsymmetrisch zum Ursprung !

2) Bestimmen Sie über die Tabellen den Wert von **I** !

3) Skizzieren Sie den Graphen von F_0 über dem Intervall: [-10 ; 10] !

4) Läßt sich eine Aussage über die Beschränktheit der Funktionswerte formulieren ?

---

5) Skizzieren Sie mit geeigneten Wertepaaren der Tabellen den Graphen der Umkehrfunktion F_0^*, die Ihnen sicherlich bekannt vorkommen wird und zu einer Aussage führen sollte, was F_0 vermutlich ist.

6) Beweisen Sie Ihre Behauptung aus 5) unter Verwendung geeigneter Regeln über die Differentiation von Umkehrfunktionen !

---

[1] Das Ihnen bekannte Programm „rieman“ wurde hier verwendet

Die Integralfunktion $F_0(x) := \int_0^x \frac{1}{t^2+1} \cdot dt$

x	$F_0(x)$
0,0	0,000000
0,1	0,099669
0,2	0,197396
0,3	0,291457
0,4	0,380506
0,5	0,463648
0,6	0,540420
0,7	0,610726
0,8	0,674741
0,9	0,732815
1,0	0,785398
1,1	0,832981
1,2	0,876058
1,3	0,915101
1,4	0,950547
1,5	0,982794
1,6	1,012197
1,7	1,039072
1,8	1,063698
1,9	1,086318
2,0	1,107149

x	$F_0(x)$
-20	-1,520838
-18	-1,515298
-16	-1,508378
-14	-1,499489
-12	-1,487655
-10	-1,471128
-8	-1,446441
-6	-1,405648
-4	-1,325818
-2	-1,107149
0	0,000000
2	1,107149
4	1,325818
6	1,405648
8	1,446441
10	1,471128
12	1,487655
14	1,499489
16	1,508378
18	1,515298
20	1,520838

x	$F_0(x)$
0	0,000000
5	1,373401
10	1,471128
15	1,504228
20	1,520838
25	1,530818
30	1,537475
35	1,542233
40	1,545802
45	1,548578
50	1,550799
55	1,552617
60	1,554131
65	1,555413
70	1,556512
75	1,557464
80	1,558297
85	1,559032
90	1,559686
95	1,560270
100	1,560797

x	$F_0(x)$
0	0,000000
100	1,560797
200	1,565796
300	1,567463
400	1,568296
500	1,568796
600	1,569130
700	1,569368
800	1,569546
900	1,569685
1000	1,569796
1100	1,569887
1200	1,569963
1300	1,570027
1400	1,570082
1500	1,570130
1600	1,570171
1700	1,570208
1800	1,570241
1900	1,570270
2000	1,570296