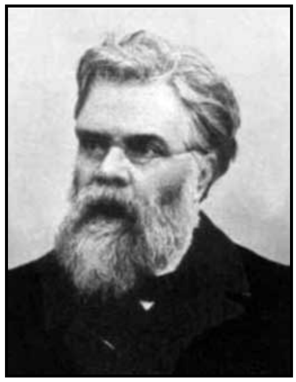
Übung Geradengleichungen (2)

Können wir das Theorem von Lemoine bestätigen?

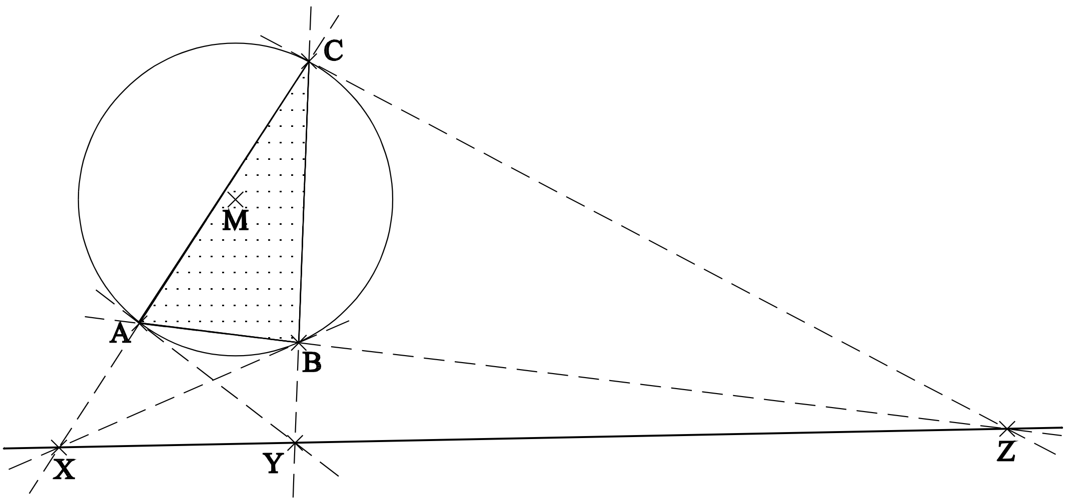


Auf den französischen Mathematiker Emile **Lemoine**[1] geht das folgende Dreitangentenproblem zurück:

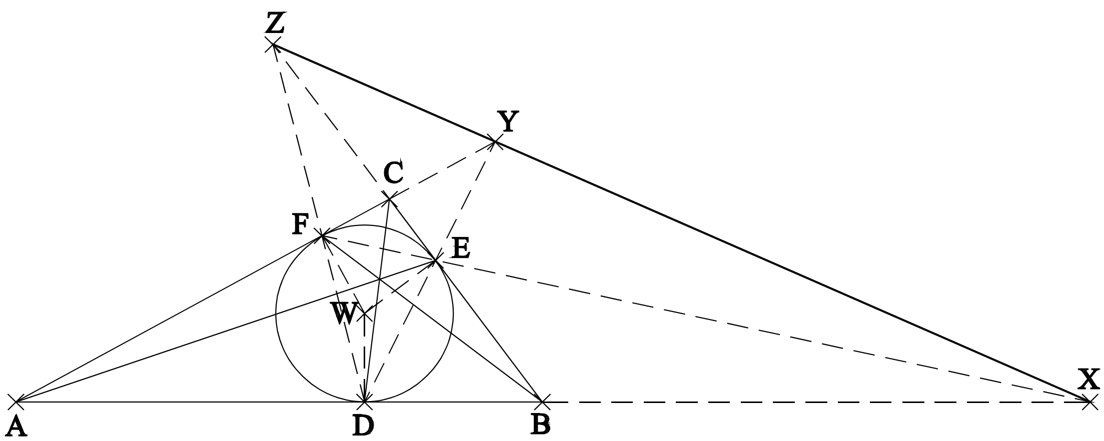
Zeichnet man in drei Kreispunkten A, B und C die Kreistangenten t_A, t_B und t_C und konstruiert die Schnittpunkte der Geraden durch jeweils zwei Kreispunkte mit der Tangente an den dritten Kreispunkt (Tangenten nicht parallel zu den Geraden), d.h.

$$\{X\} := g(A;C) \cap t_B \ \wedge \ \{Y\} := g(B;C) \cap t_A \ \wedge \ \{Z\} := g(A;B) \cap t_C$$

so liegen die drei Punkte X, Y und Z auf einer Geraden (sind kollinear).



Nimmt man den Kreis als Innenkreis eines Dreiecks ΔABC und zeichnet die Tangenten in den Berührpunkten D, E und F dieses Kreises, so gilt ein entsprechender Sachverhalt und das Dreieck ΔDEF entspricht dem obigen inneren Dreieck. - Umgekehrt: Wenn man im obigen Fall ein umgebendes Dreieck aus sich schneidenden Tangenten betrachten würde, entspräche dies dem unteren Sachverhalt. - Die Gerade, auf der im unteren Fall die Punkte X, Y und Z liegen, wird **Gergonne**-Gerade genannt.[2]



---

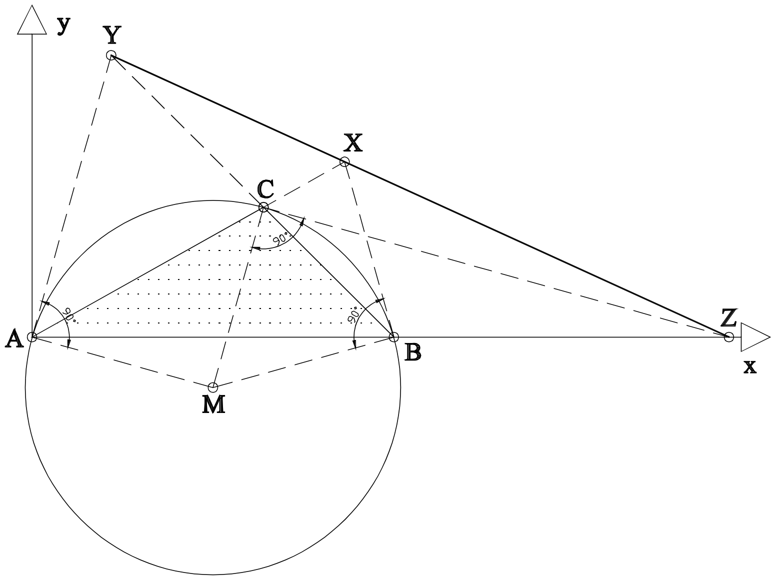
1 Emile Michel Hyacinthe **Lemoine**, ✳ 22. 11. 1840 in Quimper, ✝ 21. 02. 1912 in Paris

2 Joseph Diaz **Gergonne**, ✳ 19. 06. 1771 in Nancy, ✝ 04. 05. 1859 in Montpellier

Übung Geradengleichungen (2)

Können wir das Theorem von Lemoine bestätigen?

Wir wollen versuchen, das Theorem von Lemoine rechnerisch zu bestätigen, indem wir uns ein kartesisches Koordinatensystem definieren.
Geschickterweise wählen wir die Punkte A(0 | 0) und B(x_B | 0) auf der x-Achse und beschreiben den dritten Dreieckspunkt durch C(x_C | y_C).



1. Bestätige (oder widerlege) die nachfolgend angegebenen Koordinaten des Kreismittelpunktes und die aufgeführten Geradengleichungen. Beachte, dass M der Schnittpunkt von Mittelsenkrechten ist.

$$M\left(\frac{1}{2}\cdot x_B \;\middle|\; \frac{1}{2}\cdot\left(y_C + \frac{x_C}{y_C}\cdot(x_C - x_B)\right)\right)$$

$$g(A;B):\quad y \equiv 0$$

$$g(B;C):\quad y = \frac{y_C}{x_C - x_B}\cdot\left(x - x_B\right)$$

$$g(C;A):\quad y = \frac{y_C}{x_C}\cdot x$$

Im folgenden rechnen wir mit den konkreten Zahlen $x_B := 5$, $x_C := 3$ und $y_C := \frac{3}{2}$.

2. Bestätige: $M\left(\frac{5}{2} \;\middle|\; -\frac{5}{4}\right)$
   und bestimme die konkreten Geradengleichungen aus Aufgabe 1.

3. Bestätige:

$$t_A:\quad y = 2\cdot x$$

$$t_B:\quad y = -2\cdot x + 10$$

$$t_C:\quad y = -\frac{2}{11}\cdot x + \frac{45}{22}$$

   und überprüfe die Richtigkeit der angegebenen Punktkoordinaten über geeignete Schnittpunktsbedingungen.

$$X(\,4 \mid 2\,) \;\wedge\; Y\left(\frac{15}{11} \;\middle|\; \frac{30}{11}\right) \;\wedge\; Z\left(\frac{45}{4} \mid 0\right)$$

4. Beweise, dass X, Y und Z auf einer Geraden liegen.