Die Steigung der Normalparabel an der Stelle 4, oder "hat man mit Kanonen auf Spatzen geschossen?"

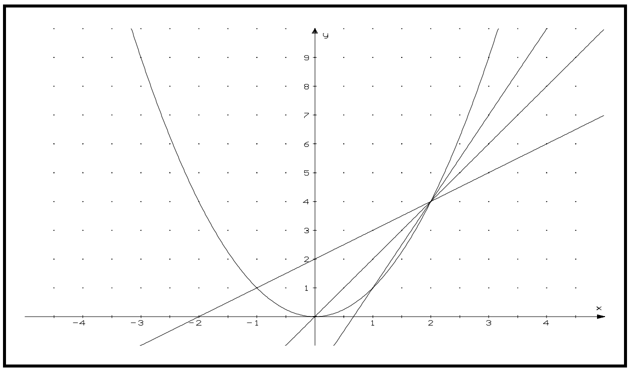
Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = x^2$ (man kann auch einfach sagen: die Normalparabel).
Gesucht ist die Steigung an der Stelle 2.

Lösung: Durch $f'(x) = 2x$ ist an jeder Stelle die Steigung von f berechenbar. Also gilt $f'(2) = 4$. Die Normalparabel hat an der Stelle 2 eine Tangente mit der Steigung 4.

Problem: Kann man die oben gestellte Aufgabe als Normalschüler allein mit Kenntnissen der 9. Klasse lösen?

Lösung 2: Ich bestimme die Gleichungen aller Geraden, die durch den Parabelpunkt (2/4) gehen und versuche unter diesen Geraden die gesuchte Tangente ausfindig zu machen.

Jede nicht zur y-Achse parallele Gerade ist durch die Gleichung $y = mx + n$ festgelegt. (Die gesuchte Tangente t ist sicher nicht parallel zur y-Achse und muß demnach durch eine Gleichung der obigen Form festgelegt sein: $t(x) = mx + n$.) - Was weiß ich über t?
Der Punkt (2/4) liegt auf dem Graphen von t: $t(2) = \mathbf{4 = m \cdot 2 + n}$. Es gilt also $n = 4 - 2m$. Daher muß die Funktionsgleichung von t die Form $\mathbf{t(x) = mx + 4 - 2m}$ haben.
(Ihr könnt die Probe machen: Setzt man für x in der "Fettgleichung" die Zahl 2 für x ein, erhält man immer den y-Wert 4, gleichgültig, welchen Wert m hat.)



In der nebenstehenden Zeichnung ist die Parabel zusammen mit drei Geraden durch (2/4) dargestellt. Die Geraden haben die Steigungen 1, 2 und 3.
Alle diese Geraden (mit einer einzigen Ausnahme (die Parallele zur y-Achse durch (2/4) haben wir vorhin schon ausgeschlossen)) schneiden die Parabel in einem weiteren Punkt.
Ziel: Welche Gerade "schneidet" die Parabel nur einmal, berührt die Parabel, ist also die gesuchte Tangente?

Da es offenbar um den Schnitt der Parabel mit unseren Geraden "mx + 4 - 2m" geht, bringe ich diese zum Schnitt: Es ergibt sich die Gleichung: $\mathbf{x^2 = mx + 4 - 2m}$

Nicht nur die binomischen Formeln holen uns ständig ein, sondern nun auch noch die p-q-Formel. (Und gleich wiederholt, wie furchtbar.)

$$x^2 - mx = 4 - 2m$$

$$x_{1,2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} + 4 - 2m}$$

Genau eine Schnittstelle ergibt sich gerade dann, wenn der Ausdruck unter der Wurzel (der Radikand) den Wert Null hat: $\mathbf{m^2/4 + 4 - 2m}$ muß den Wert Null haben:

$m^2/4 + 4 - 2m = 0$ oder: $m^2 - 8m + 16 = 0$ oder : $m_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

Einzige Lösung: $\mathbf{m = 4}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{t(x) = 4x - 4}$ $\Rightarrow$ $\mathbf{f'(2) = 4}$

Die Tangentensteigung konnte also tatsächlich auf "elementarem Weg" ermittelt werden. Manche werden sagen, daß dies aber sehr kompliziert war. Diese Menschen dürfen aber nicht vergessen, welch enormer Aufwand nötig war, um den Begriff f´ festzulegen. Rein mathematisch schießt man tatsächlich mit Kanonen auf Spatzen, wenn man die Steigung der Normalparabel mit Hilfe der Ableitung ermittelt, doch schon bei etwas komplizierteren Funktionen als der Parabel geht´s natürlich nicht mehr so elementar, und ich bin froh, daß ich ableiten kann, um derartige Probleme lösen zu können. Eine Einsicht habe ich aber noch zusätzlich gewonnen: Da ich auf dem elementaren Weg dasselbe Ergebnis wie mit der Differentialrechnung erhalten habe, wächst mein Vertrauen zu Grenzwerten , Differentialquotienten,...