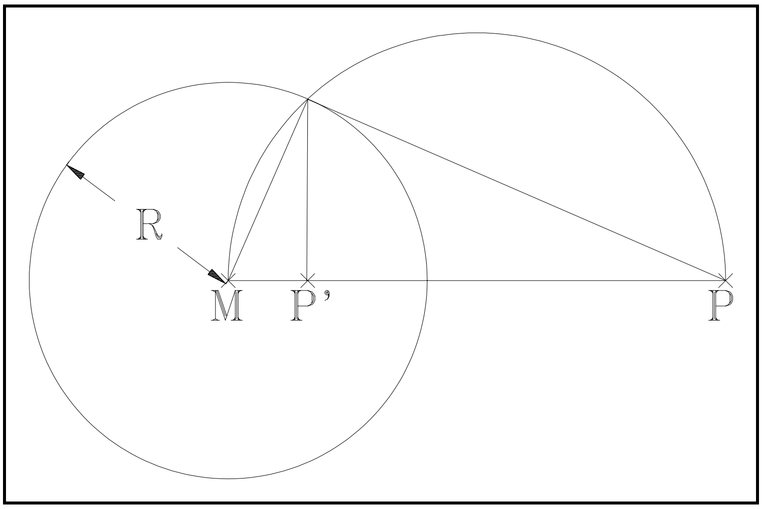
Inversion (Spiegelung) am Kreis
Polarkoordinaten sind nicht nur in $\mathbb{C}$ nützlich!

in Anlehnung an ein Skript
von: Berthold Große

Spiegelt man einen Punkt **P** an einem Kreis mit Radius **R** nach der Vorschrift:

$$\overline{\mathbf{MP}} \cdot \overline{\mathbf{MP}'} = \mathbf{R}^2$$

so wird damit einem Punkt des Kreisäußeren ein Punkt des Kreisinneren zugeordnet und umgekehrt. Punkte des Kreises sind Fixpunkte der Abbildung.



1. Ergänze die nebenstehende Skizze geeignet durch Punktbezeichnungen, (rechte) Winkel etc. und begründe mit geeigneten geometrischen Sätzen, dass die skizzierte Konstruktion zur Bestimmung von Bildpunkten richtig ist.

Führt man ein Koordinatensystem so ein, dass der Mittelpunkt des Inversionskreises im Ursprung liegt, so gilt für die Koordinaten x' und y' des Bildpunktes **P′**: $x' = \frac{R^2}{x^2+y^2} \cdot x \quad ; \quad y' = \frac{R^2}{x^2+y^2} \cdot y$.

Natürlich sind die vorherigen Beziehungen wegen **P″ = P** bezogen auf Punkt und Bildpunkt austauschbar.

2. Fertige eine entsprechende Skizze mit Koordinatensystem an und beweise mit Hilfe von Strahlensätzen die vorherigen Beziehungen.

---

3. Das Bild einer Geraden ist i.a. ein Kreis, der durch den Ursprung verläuft.

   a) Wähle als Inversionskreis den Ursprungskreis mit Radius R = 4 und die Gerade mit der Gleichung x = 7. Bestimme auf konstruktivem Wege einige Bildpunkte von Geradenpunkten. Weise danach rechnerisch nach, dass alle Bildpunkte die Gleichung: $\left(x' - \frac{8}{7}\right)^2 + y'^2 = \left(\frac{8}{7}\right)^2$ erfüllen.

   b) Die Gerade g soll nun den Inversionskreis schneiden. - Gegeben sei die Gerade mit der Gleichung: $y = 4 \cdot x - 2$. Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes des Bildkreises sowie seine Radiusgröße.

   c) Erläutere, was sich als Bild einer Geraden ergibt, die durch den Ursprung verläuft.

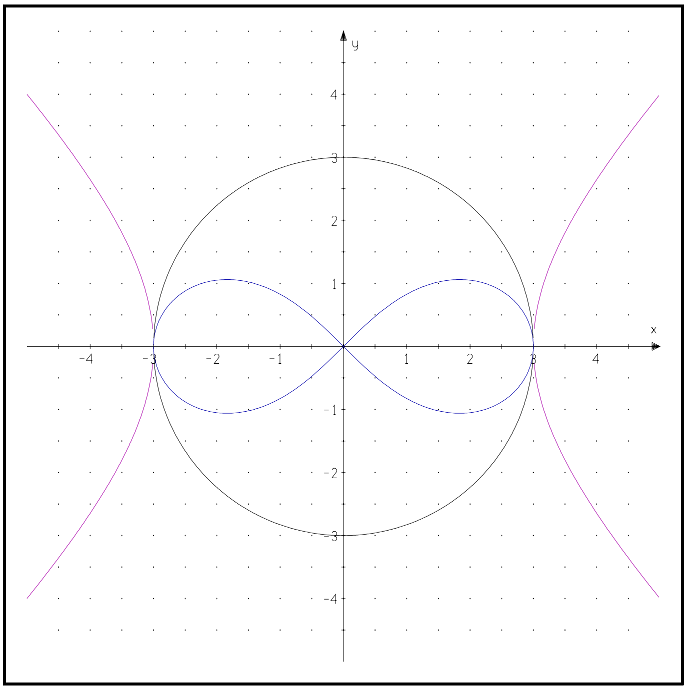
---

4. Das Bild eines Kreises (der nicht durch den Ursprung verläuft) ist ein Kreis.

   a) Der Inversionskreis sei der Ursprungskreis mit Radius R = 5 und der gegebene Kreis **k** habe den Mittelpunkt **M**(4 | 0) und den Radius **r** = 2. - Fertige eine Skizze an (Blatt quer; Inversionskreis linker Rand) und invertiere einige Punkte des Kreises, sowie seinen Mittelpunkt auf konstruktivem Wege. Bestätige danach, dass **k′** durch die Gleichung: $\left(x' - \frac{25}{3}\right)^2 + y'^2 = \frac{625}{36}$. - Ist demnach **M′** der Mittelpunkt von **k′** ?

b) Erläutere, wie sich wesentlich verschiedene Lagen von Kreisen im Koordinatensystem auf die Lage des Bildkreises auswirken. - Gibt es einen Fixkreis bei der Kreisspiegelung?

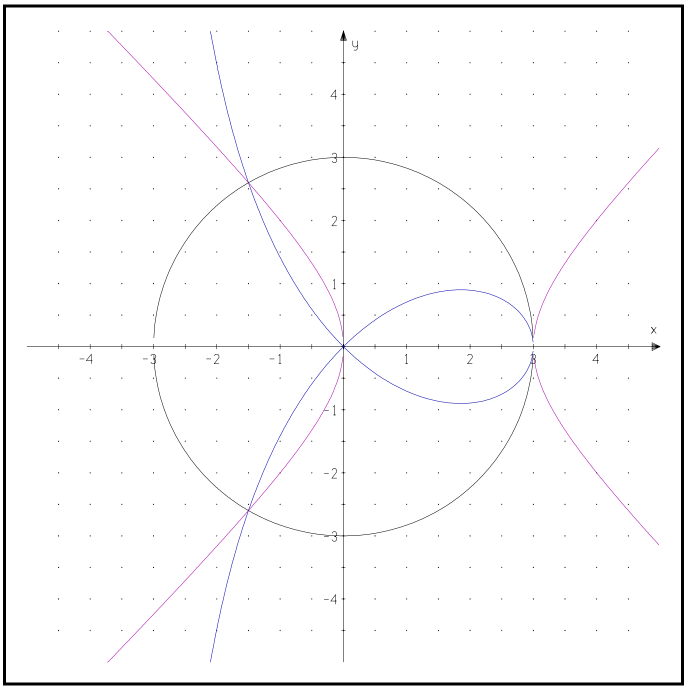
Es sollen nun Kegelschnittskurven an einem Inversionskreis gespiegelt werden.



5. Das Bild einer achsensymmetrischen Hyperbel ist eine **Lemniskate** (gr.: Schleife). Die Gleichung der dargestellten Hyperbel lautet: $x^2 - y^2 = 9$ und die Gleichung des Inversionskreises: $x^2 + y^2 = 9$, womit sich der Spezialfall der Bernoullischen Lemniskate ergibt (d.h. der Scheitel der Hyperbel berührt den Inversionskreis).

   a) Entwickele eine Gleichung für die Lemniskate durch Inversion der Hyperbel mit der Gleichung: $x^2 - y^2 = \mathbf{a}^2$ am Inversionskreis mit Radius **R**. - Gib danach für den dargestellten Spezialfall (a = R = 3) die zugehörige Gleichung an und bestätige die Richtigkeit durch exemplarische Punktkoordinaten.

   b) In Polarkoordinaten erweisen sich die rechnerischen Beziehungen der Kreisinversion als denkbar einfach: $\varphi = \varphi'$ und $r \cdot r' = R^2$.
   Zeige unter Beachtung von $x = r \cdot \cos(\varphi)$ und $y = r \cdot \sin(\varphi)$, dass die Lemniskate in Polarkoordinaten beschrieben wird durch die Gleichung: $\boxed{r'^2 = a^2 \cdot \cos(2 \cdot \varphi)}$.



6. Verschiebt man den linken Ast der Hyperbel in den Ursprung, so entsteht bei Kreisinversion eine **Strophoide** (gr.: Wendung, Drehung).

   a) Gib die Gleichung der skizzierten, gleichseitigen Hyperbel an.

   b) Zeige, dass die Strophoide in Polarkoordinaten beschrieben wird durch die Gleichung: $\boxed{r' = a \cdot \frac{\cos(2 \cdot \varphi)}{\cos(\varphi)}}$.

   c) Zeige, dass die Strophoide in kartesischen Koordinaten beschrieben wird durch die Gleichung: $\boxed{y^2 = x^2 \cdot \frac{a - x}{a + x}}$.

7. Die **Zissoide** (des Diokles) entsteht, wenn der Hyperbelast, der durch den Ursprung verläuft (siehe 6.) entartet zu einer Parabel.

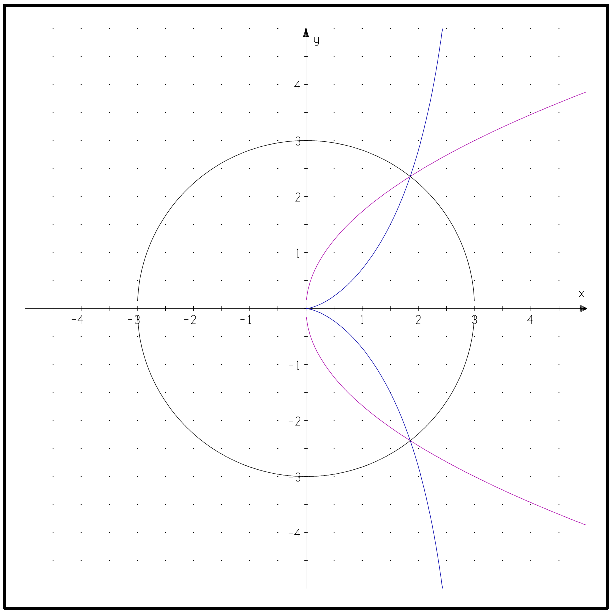
   a) Entwickle wiederum Gleichungen für diese Inversionskurve in Polarkoordinaten und in kartesischen Koordinaten. - Bestätige die Gleichungen:

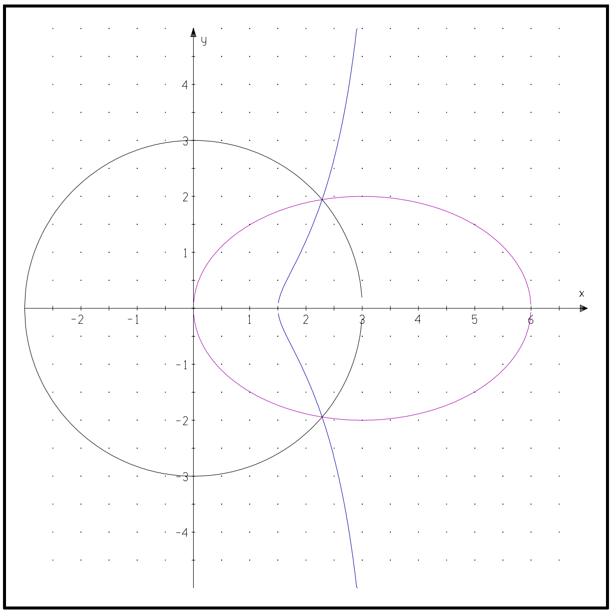
   $$\boxed{r' = 2\cdot a \cdot \frac{\sin^2(\varphi)}{\cos(\varphi)}}$$

   und $$\boxed{y^2 = \frac{x^3}{2\cdot a - x}}.$$

   b) Gib die zugehörigen Gleichungen für den nebenstehend skizzierten Spezialfall an!

   c) „Entartet" die Parabel weiter zur Ellipse, so verläuft die Bildkurve nicht mehr durch den Ursprung. - Gib die Gleichung der Ellipse an, sowie Gleichungen, die die Bildkurve beschreiben (Kartesische oder Polar- Koordinaten? - Was ist wohl einfacher?)





8. Der Fall der Inversion einer Parabel, deren Brennpunkt im Ursprung liegt, ist unten dargestellt. Die Bildkurve ist eine **Kardioide**, die sich auch als Rollkurve (Zykloide) oder Pascalsche Schnecke erzeugen läßt.

   a) Gib für den nebenstehenden Spezialfall die Gleichungen für Parabel und Kardioide (in Polarkoordinaten) an.

   b) (Für Masochisten und Mutige): Entwickle eine Kardioidengleichung in kartesischen Koordinaten.

   c) Erläutere, welche graphischen Veränderungen zu erwarten sind, wenn die Parabel entweder entartet zur Ellipse oder entartet zur Hyperbel (2. Hyperbelast).