Vollständige Induktion
(auf die Reihenfolge der Rechenoperationen kommt es an!)

Es seien zwei endliche Zahlenmengen reeller Zahlen gleicher Mächtigkeit **n** gegeben, die wir z.B. wie folgt bezeichnen können: $\mathbf{A} := \{ a_1, a_2, a_3, \ \dots \ , a_n \}$ und $\mathbf{B} := \{ b_1, b_2, b_3, \ \dots \ , b_n \}$.

Wir wollen die Zahlen dieser Zahlenmengen mit 3 Rechenoperationen verknüpfen: **Quadratur - Summation - Multiplikation**.

Ist es eigentlich egal, ob man die soeben dargestellte Reihenfolge wählt, oder ob man die Reihenfolge: **Multiplikation - Summation - Quadratur -** wählt, d.h. ergeben die Ausdrücke:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) \quad \text{und} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \right)^2$$

stets denselben Wert?

<u>Aufgabe:</u> Wähle z.B. jeweils 3 Zahlen für Zahlenmengen **A** und **B** und bestimme den Wert der beiden Ausdrücke! - Bestätige an mindestens 2 Beispielrechnungen (auch negative Zahlen berücksichtigen), dass der Wert des linken Ausdrucks nicht kleiner als der rechte Wert ist.

Folgende Aussageform **A(n)** erscheint sinnvoll: $(n \in \mathbb{N}^*)$

A(n):
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \right)^2$$

<u>Induktionsanfang:</u>

A(1): $a_1^2 \cdot b_1^2 \geq (a_1 \cdot b_1)^2$ ist trivialerweise wahr.

<u>Induktionsschluß (**A(n)** $\Rightarrow$ **A(n+1)**):</u>[1]

A(n+1):
$$\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n+1} b_i^2 \right) =$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a_{n+1}^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 + b_{n+1}^2 \right) =$$
$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) + a_{n+1}^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2 \right) + b_{n+1}^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \right) + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2$$

Nun können wir unter Verwendung der Voraussetzung **A(n)** unserer Implikation diesen Ausdruck ab-

---

[1] <u>Erinnerung:</u> Die Implikation ist eine Subjunktion mit Allquantor!

schätzen!

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 + a_{n+1}^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) + b_{n+1}^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2 \qquad (*)$$

....

Tja, nun ist die Fortsetzung eigentlich nicht so ganz einfach! - Zuerst sollte man sich (auf einem Nebenrechnungsblatt) über das Ziel klar werden! - Aha! - Irgendwie hat das wieder etwas mit binomischen Formeln zu tun und man müsste sich besonders mit den beiden mittleren Summanden beschäftigen! - Die entstehen doch auch bei folgender Quadratur:

$$\left(a_{n+1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} - b_{n+1} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\right)^2$$

und der Wert dieses Quadrates kann niemals negativ sein! - Mit dieser Idee können wir, nach Ausmultiplizieren des Binoms, den oberen Ausdruck weiter abschätzen!

....

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot b_{n+1} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)} + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot b_{n+1} \cdot \sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2} + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot b_{n+1} \cdot \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right| + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2$$

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right)^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot b_{n+1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right) + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i + a_{n+1} \cdot b_{n+1}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot b_i\right)^2$$

<u>Aufgabe:</u> Begründe alle Umformungsschritte des Induktionsschlusses ausführlich (Du solltest in der Lage sein, diese Umformungsschritte an dem selbst gewählten Zahlenbeispiel zu verdeutlichen).

Oh! - Ist, evtl. am Beispiel, aufgefallen, dass hier etwas nicht korrekt ist?! - Ist denn das Ungleichheitszeichen ($\geq$) in der vorletzten Zeile gerechtfertigt? - Wenn man die Betragstriche durch Klammern ersetzt wird die Summe sicher nicht größer, aber was passiert, wenn sowohl die Summe als auch das Produkt: $a_{n+1} \cdot b_{n+1}$ negativ ist?? - Wir müssen wohl die häßlichen Betragstriche vermeiden!

....

Vollständige Induktion
(auf die Reihenfolge der Rechenoperationen kommt es an!)

Veränderte Ansatzidee: Der Gedanke mit der binomischen Formel war schon gut, doch sollte man den Wurzelausdruck vermeiden! - Deshalb in anderer Reihenfolge: Erst binomische Formeln, dann summieren!

Die folgende Aussage ist sicher wahr:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(a_{n+1} \cdot b_i - b_{n+1} \cdot a_i\right)^2 \geq 0$$

Fasst man nun nach Ausmultiplizieren der n quadratischen Differenzen (binomische Formel) sinnvoll zu 3 Summen zusammen, dann ist diese Aussage äquivalent zu:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{n+1}^2 \cdot b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot a_{n+1} \cdot b_{n+1} \cdot a_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^{n} b_{n+1}^2 \cdot a_i^2 \geq 0$$

womit uns nun eine veränderte Abschätzung der beiden mittleren Summanden des Ausdrucks (*) möglich ist!

$$\geq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \right)^2 + 2 \cdot a_{n+1} \cdot b_{n+1} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i + a_{n+1}^2 \cdot b_{n+1}^2$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i + a_{n+1} \cdot b_{n+1} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot b_i \right)^2$$

Zugegeben, diese Ungleichung[2], die man sich merken sollte, war nicht ganz so einfach zu beweisen. Aber Ungleichungen sind bei Induktionsbeweisen nun einmal etwas schwieriger handhabbar als Summenformeln und Teilbarkeitsaussagen.

---

[2] Augustin Louis **Cauchy** (1789 - 1857) und Hermann Amandus **Schwarz** (1843 - 1921) zugeschrieben.