Vollständige Induktion

Aufgaben $n \in \mathbb{N}^*$

Zeige, dass die Subjunktion: **A(n) → A(n+1)** für alle $n \in \mathbb{N}^*$ wahr ist.

1) **A(n)** : $n^2 + n + 1$ ist eine gerade Zahl

2) **A(n)** : $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n}{2} \cdot (n+1) + 3$

Prüfe durch konkrete Einsetzungen, beginnend mit **n = 1**, ob die zugehörigen Aussagen wahr sind.

3) **A(n)** : $n^2 + 1$ ist eine gerade Zahl

4) **A(n)** : $2^n < n^3$

5) **A(n)** : $n^2 - n + 41$ ist eine Primzahl

Finde jeweils einen geschlossenen algebraischen Ausdruck für die Summen und beweise dann die Aussageformen mit Vollständiger Induktion.

6) $\sum_{i=1}^{n} (2 \cdot i - 1) =$

7) $\sum_{i=1}^{n} (4 \cdot i - 1) =$

8) $\sum_{i=1}^{n} i \cdot (i+1) =$

9) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1)} =$

10) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(2 \cdot i - 1) \cdot (2 \cdot i + 1)} =$

11) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(3 \cdot i - 1) \cdot (3 \cdot i + 2)} =$

12) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{(2 \cdot i - 1) \cdot (2 \cdot i + 1)} =$

13) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i \cdot (i+1) \cdot (i+2)} =$

Vollständige Induktion

Aufgaben

$n \in \mathbb{N}^*$

Beweise die Allgemeingültigkeit folgender Aussageformen mit Vollständiger Induktion.

14) **S(n)** : $\sum_{i=0}^{n-1} 2^i = 2^n - 1$

15) **S(n)** : $\left(\sum_{i=1}^{n} i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} i^3$

16) **B(n)** : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k$ (Binomialentwicklung)

17) **M(n)** : $\left(r \cdot \cos(\varphi) + r \cdot i \cdot \sin(\varphi)\right)^n = r^n \cdot \left(\cos(n \cdot \varphi) + i \cdot \sin(n \cdot \varphi)\right)$ (Satz von Moivre)

18) **T(n)** : $2^{3 \cdot n} - 1$ ist teilbar durch 7

19) **T(n)** : $9^n - 1$ ist teilbar durch 8

20) **T(n)** : $n^5 - n$ ist teilbar durch 30

21) **U(n)** : $2^n > n^3$ für $n>9$

22) **U(n)** : $\sqrt{n + \sqrt{(n-1) + \ldots + \sqrt{2 + \sqrt{1}}}} < \sqrt{n} + 1$

23) **B(n)** : $(1 + x)^n > 1 + n \cdot x$ für: $1 + x > 0$; $x \neq 0$; $n > 1$ (Bernoullische Ungleichung)

24) **U(n)** : $\sum_{i=n}^{2n-1} \frac{1}{i+1} > \frac{13}{24}$

25) **A(n)** : $|\wp(M)| = 2^n$ mit : $|M| = n$ (Mächtigkeit einer Potenzmenge)

26) **P(n)** : n Geraden einer Ebene schneiden sich in höchstens $\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)$ Punkten.

27) **T(n)** : $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ ist teilbar durch 5

28) **F(n)** : $f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$, wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist. (Binet-Formel)

Hinweis: Fibonnacci-Zahlen: $f_{n+2} := f_{n+1} + f_n$ mit $f_1 := 1$ und $f_2 := 1$ für $n \geq 1$; J.P.M. Binet, 1786 - 1856.
Quelle: Beutelspacher/Zschiegner - Diskrete Mathematik für Einsteiger; Vieweg 2002

Quelle (einiger Aufgaben): Heinz Bachmann - Einführung in die Analysis (Grundlagen); Diesterweg - Salle 1975