Konvergenz einer Summenfolge

Ab wann liegen alle Folgenglieder in einer Umgebung um eine reelle Zahl? - Sicher?

Zunächst eine kurze Wiederholung zur Konvergenz einer (unendlichen) Zahlenfolge.

Beispiel: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{\dfrac{(-1)^n\cdot 100 - 5\cdot n^2}{16\cdot n + 3\cdot n^2}\right\}$

n	a_n
1	-5,526316
2	1,818182
3	-1,933333
5	-1,451613
10	-0,869565
50	-1,493976
100	-1,579114
500	-1,648945
1000	-1,657792
5000	-1,664889
10000	-1,665778

Durch Bestimmung von Folgengliedern mit großer Indexnummer (siehe nebenstehend) oder durch geeignete algebraische Umformung:

$$\frac{\left((-1)^n\cdot 100 - 5\cdot n^2\right)\cdot\frac{1}{n^2}}{\left(16\cdot n + 3\cdot n^2\right)\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{-5 + (-1)^n\cdot\frac{100}{n^2}}{3 + \frac{16}{n}}$$

vermuten wir, dass die Zahlenfolge konvergent mit dem Grenzwert $-\frac{5}{3}$ ist.

Wir erinnern uns an die Grunddefinition der Konvergenz einer Zahlenfolge:

$$\bigvee_{g_a\in\mathbb{R}}\ \bigwedge_{\varepsilon>0}\ \bigvee_{N}\ \bigwedge_{n>N} \left|a_n - g_a\right| < \varepsilon$$

Aufgabe: Interpretiere die obige Grunddefinition inhaltlich-sprachlich und gib die Folgengliednummer N an, ab der alle weiteren Folgenglieder der Beispielfolge in einer $\frac{1}{100}$ - Umgebung um $-\frac{5}{3}$ liegen.

Gegeben sind nun zwei Zahlenfolgen und es wird daraus eine neue Folge, aus den Summen der jeweiligen Folgenglieder gebildet.

Beispiel: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{\dfrac{4\cdot n + 9}{3 - 5\cdot n}\right\}$; $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*} := \left\{\dfrac{4\cdot n^2 + 90}{(5 - 2\cdot n)^2}\right\}$

n	a_n	b_n	$a_n + b_n$
1	-6,500000	10,444444	3,944444
2	-2,428571	106,000000	103,571429
3	-1,750000	126,000000	124,250000
5	-1,318182	7,600000	6,281818
10	-1,042553	2,177778	1,135225
50	-0,846154	1,118006	0,271852
100	-0,822938	1,054306	0,231369
500	-0,804565	1,010166	0,205601
1000	-0,802281	1,005041	0,202760
5000	-0,800456	1,001002	0,200546
10000	-0,800228	1,000500	0,200272

Aufgabe:

Bestätige durch geeignete algebraische Umformungen, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vermutlich gegen $-\frac{4}{5}$ konvergiert, die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ gegen 1.

Konvergenz einer Summenfolge

Ab wann liegen alle Folgenglieder in einer Umgebung um eine reelle Zahl? - Sicher?

Es soll nun begründet werden, dass die Summenfolge $\{a_n + b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ gegen die Summe der Einzelgrenzwerte konvergiert, wenn die Einzelgrenzwerte existieren.

Argumentationsskizze:

– Weil $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ konvergiert (Voraussetzung) kann man zu jeder vorgegebenen $\frac{\varepsilon}{2}$- Umgebung (z.B. $\frac{1}{200}$-Umgebung) eine Indexnummer N_1 angeben, ab der alle weiteren Folgenglieder in der Umgebung um g_a (z.B. $-\frac{4}{5}$) liegen.

– Weil $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ konvergiert (Voraussetzung) kann man zu jeder vorgegebenen $\frac{\varepsilon}{2}$- Umgebung (z.B. $\frac{1}{200}$-Umgebung) eine Indexnummer N_2 angeben, ab der alle weiteren Folgenglieder in der Umgebung um g_b (z.B. 1) liegen.

– Nimmt man nun als gemeinsame Indexnummer die größere der beiden Zahlen N_1 und N_2, so haben ab dieser Indexnummer sicherlich alle Folgenglieder der Einzelfolgen zu den jeweiligen Grenzwerten einen Abstand, der kleiner ist als $\frac{\varepsilon}{2}$ (z.B. $\frac{1}{200}$). - Damit haben aber, ab dieser Indexnummer, die Folgenglieder der Summenfolge zu der Summe der Einzelgrenzwerte sicher einen Abstand, der kleiner ist als ε (z.B. $\frac{1}{100}$).

  Damit konvergiert die Summenfolge gegen die Summe der Einzelgrenzwerte (z.B. $\frac{1}{5}$).

Aufgabe:

Formuliere ein Beispiel dafür, dass der Kehrsatz des Satzes:

“Wenn die Einzelgrenzwerte zweier (unendlicher) Zahlenfolgen existieren, so existiert auch der Grenzwert der Summenfolge und ist gleich der Summe der Einzelgrenzwerte.”

falsch ist, d.h. der Grenzwert einer Summenfolge kann existieren, ohne dass die Einzelfolgen konvergent sind.