<u>Existenz der *Eulerschen Zahl e*</u>

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$$

$$\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$$

Zu zeigen ist, dass die beiden Folgen mit den allgemeinen Folgengliedern $\mathbf{a_n}$ und $\mathbf{b_n}$ eine Intervallschachtelung darstellen.
Benötigt wird die *Bernoullische Ungleichung*: $(1+x)^n > 1 + n\cdot x$, für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; $x > -1$; $x \neq 0$.

1) Trivialerweise gilt für alle $n\in\mathbb{N}$: $\mathbf{a_n < b_n}$

2) $\mathbf{a_n > a_{n-1}}$:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n-1}\right) = \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n}{n-1}}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right) = \left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \cdot \frac{n}{n-1} > \left(1-\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{n}{n-1} = 1$$

3) $\mathbf{b_n < b_{n-1}}$:

$$\frac{b_{n-1}}{b_n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)} = \left(\frac{\frac{n}{n-1}}{\frac{n+1}{n}}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(\frac{n^2-1+1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} = \left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} > \left(1+\frac{1}{n-1}\right) \cdot \frac{n-1}{n} = 1$$

4) **Grenzwert der Intervalllänge**:

$$0 \le \lim_{n\to\infty}\left(b_n - a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n} \le b_1 \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = b_1 \cdot 0 = 0$$