

## MATHEMATIK UND WINDMÜHLEN

### *Cauchy*

Sogar das Vaterunser kann man von hinten aufsagen.  
Spanisches Sprichwort

In den ersten drei Jahrzehnten des 19. Jahrhunderts wurde die Mathematik plötzlich zu etwas wesentlich anderem, als sie in der heroischen Periode nach Newton im 18. Jahrhundert gewesen war. Nach einer Zeit beispielloser Erweiterung und Erfindungsfreiheit trat eine Wandlung zu größerer Strenge in der Beweisführung ein. Etwas Ähnliches ist auch heute wieder klar zu erkennen, doch wäre es vorschnell, wollte man prophezeien, wie die Mathematik im nächsten Jahrhundert aussehen wird.

Vor etwa 150 Jahren ahnte nur Gauß, welche Form sie bald annehmen würde, aber wie Newton war er zu zurückhaltend, Lagrange, Laplace und Legendre mitzuteilen, was er vorhersah. Obwohl die großen französischen Mathematiker bis weit in das erste Drittel des 19. Jahrhunderts hinein lebten, erscheint uns heute ein Großteil ihrer Arbeiten nur als Vorbereitung. So wies Lagrange mit seiner Theorie der Gleichungen Abel und Galois den Weg, Laplace bereitete mit seinen Arbeiten über die Differentialgleichungen der Newtonschen Astronomie - einschließlich der Theorie der Schwerkraft - die großartige Entwicklung der mathematischen Physik im 19. Jahrhundert vor, und Legendres Bemühungen in der Integralrechnung regten Abel und Jacobi zu den ergiebigsten Forschungen an, die je in der Analysis unternommen wurden. Selbst Lagranges analytische Mechanik, die immer noch modern ist, sollte durch Jacobi und später durch Poincaré in großartiger Weise bereichert werden, und auch seinen Arbeiten über die Variationsrechnung, die ebenfalls klassisch und nützlich bleiben, gab Weierstraß im Geist der strengen und schöpferischen zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine neue Form, die ihrerseits heute wieder erweitert und erneuert wird. (Amerikanische und italienische Mathematiker sind an dieser Entwicklung führend beteiligt.)

Augustin Louis Cauchy, der erste der großen französischen Mathematiker, dessen Gedankengut entschieden der modernen Zeit angehört, wurde am 21. August 1789 in Paris geboren - kaum sechs Wochen nach dem Fall der Bastille. Als Kind der Revolution zahlte er der Freiheit und Gleichheit seinen Tribut; er wuchs unterernährt auf, und es war nur der politischen Klugheit und dem Geschick seines Vaters zu danken, daß er diese Hungerzeit überlebte. Als die Schreckenszeit vorüber war, trat er nach der Ausbildung an der Polytechnique in den Dienst Napoleons. Nach dem Sturz des Usurpators bekam Cauchy erneut alle Entbehrungen der Revolution und Gegenrevolution zu fühlen. Die politische Unruhe seiner Zeit beeinträchtigte seine Arbeit in vieler Hinsicht, und wenn je Revolutionen und dergleichen die Arbeit eines Wissenschaftlers in Mitleidenschaft zogen, dann ist Cauchy ein Musterbeispiel dafür. Als Mathematiker war er außergewöhnlich ideenreich und von einer Fruchtbarkeit, in der er nur von zweien übertroffen wurde: von Euler und von Cayley. Sein Werk war, wie seine Zeit, revolutionär.

**Die moderne Mathematik verdankt Cauchy zwei ihrer bedeutendsten Fortschritte, von denen jeder einen scharfen Bruch mit der Mathematik des 18. Jahrhunderts bedeutet. Der erste war die Einführung der strengen Beweisführung in die Analysis.** Es ist schwer, ein Gleichnis für die Größe dieses Fortschrittes zu finden; vielleicht genügt das folgende. Nehmen wir an, ein ganzes Volk hätte jahrhundertlang falschen Göttern gehuldigt und plötzlich wird ihm sein Irrtum klar. Vor der Einführung dieser Strenge war die mathematische Analysis ein ganzes Pantheon falscher Götter. Damit wurde Cauchy neben Gauß und Abel zu einem der großen Pioniere. Gauß hätte darin führend sein können, lange bevor Cauchy sich diesem Thema widmete; er unterließ es jedoch, und so war es Cauchys raschen Veröffentlichungen und seiner Lehrtätigkeit zu danken, daß sich diese Strenge in der mathematischen Analysis durchsetzte.

Die zweite grundlegend wichtige Methode, um die Cauchy die Mathematik bereicherte, lag in entgegengesetzter Richtung - in der Kombinatorik. Ausgehend vom Kernstück der Arbeiten Lagranges über die Theorie der Gleichungen, begann er, systematisch die Gruppentheorie zu schaffen. Ihr Wesen wird später beschrieben werden; einstweilen sei nur auf die Modernität seiner Auffassung hingewiesen.

Im Gegensatz zu vielen seiner Vorgänger, die ihre Anregungen aus der praktischen Anwendung der Mathematik empfangen, entwickelte Cauchy seine Theorien um ihrer selbst willen, ohne zu fragen, ob das von ihm Erdachte anwendbar war, und sei es auch, nur auf andere Gebiete der Mathematik. Er drang tiefer ein, sah die Verfahren und die Gesetze ihrer Zusammenhänge hinter den algebraischen Formeln, isolierte sie und gelangte so zur Gruppentheorie. Heute ist diese elementare und dennoch verwickelte Theorie in vielen Gebieten der reinen und der angewandten Mathematik von grundlegender Bedeutung, von der Theorie algebraischer Gleichungen bis zur rechnerischen Darstellung des Atomaufbaus. Sie liegt auch der Geometrie der Kristalle zugrunde, um nur eines ihrer Anwendungsgebiete zu nennen. Ihre späteren Weiterentwicklungen reichen weit in die höhere Mechanik und in die moderne Theorie der Differentialgleichungen hinein.

Cauchys Leben und sein Charakter erinnern uns zuweilen an den armen Don Quijote - wir wissen manchmal nicht, ob wir lachen oder weinen sollen, und als Kompromiß fluchen wir. Sein Vater, Louis-Francois, war ein Muster an Tugend und Frömmigkeit, zwei an sich vortreffliche Eigenschaften, die aber leicht übertrieben werden. Der Himmel allein weiß, wie Cauchy senior der Guillotine entging, denn er war Jurist am Staatsgerichtshof, ein feinsinniger, in klassischen Sprachen und Bibelkunde hochgelehrter Mann, bigotter (Meyers Lexikon: engherzig, scheinheilig, frömmelnd; Bigotterie: strenge, kleinliche Frömmigkeit) Katholik und Polizeistatthalter in Paris, als die Bastille erstürmt wurde. Zwei Jahre vor Ausbruch der Revolution hatte er Marie-Madeleine Desestre geheiratet, eine vortreffliche, nicht übermäßig intelligente Frau und gleich ihm bigott katholisch.

Augustin war das älteste von sechs Kindern. Von seinen Eltern erbt und übernahm er alle die achtenswerten Eigenschaften, um derentwillen ihre Lebensgeschichte sich liest wie die süßlichen Liebesromane für französische Schulmädchen unter sechzehn Jahren, in denen Held und Heldin so rein und geschlechtslos sind wie die Engel des Himmels. Bei solchen Eltern ist es vielleicht nicht verwunderlich, daß Cauchy zum widerspenstigen Don Quijote des französischen Katholizismus der Jahre 1830 bis 1850 heranwuchs, als die Kirche in der Defensive war. Er litt für seine Religion, und dafür verdient er Achtung (selbst wenn er, wie man ihm vorwarf, ein selbstgefälliger Heuchler war), aber mehr als einmal war er reichlich selbst schuld daran. Sein ewiges Predigen ging den Leuten auf die Nerven.

Cauchys Jugend fiel in die blutigste Zeit der Revolution. Die Schulen waren geschlossen. Da der Konvent einstweilen für Wissenschaft und Kultur keinen Bedarf hatte, ließ er die Gebildeten und die Wissenschaftler verhungern oder schleppte sie zur Guillotine. Um der klar zu erkennenden Gefahr zu entgehen, übersiedelte Cauchy-senior mit seiner Familie in sein Landhaus in dem Dorf Arcueil. Dort wartete er das Ende der Schreckensherrschaft ab und ernährte sich und seine Familie kärglich von Obst und Gemüse. Die Folge war, daß Cauchy körperlich unterentwickelt und anfällig aufwuchs; erst mit zwanzig erholte er sich einigermaßen von seinen mageren Kinderjahren.

Diese Abgeschlossenheit, die mit der Zeit weniger streng wurde, dauerte fast sieben Jahre, während der sich Vater Cauchy um die Ausbildung seiner Kinder kümmerte. Er schrieb seine eigenen Lehrbücher, darunter mehrere in flüssigen Versen, in denen er Meister war. Ein großer Teil der Lektionen galt der sorgfältigen religiösen Unterweisung, wobei ihn die Mutter tatkräftig unterstützte.

Arcueil grenzte an die stattlichen Güter des Marquis Laplace und des Grafen Claude-Louis Berthollet (1748-1822), des hervorragenden und eigenwilligen Chemikers, der während der Schreckensherrschaft nur deshalb seinen Kopf behielt, weil er ein Fachmann für Schießpulver war. Die beiden waren eng befreundet. Cauchy verstand es, sich mit seinen vornehmen und wohlgenährten Nachbarn ein wenig anzufreunden.

Berthollet ging nie irgendwohin. Laplace war geselliger und stattete von Zeit zu Zeit dem Häuschen seines Freundes einen Besuch ab; bald fiel ihm auch der junge Cauchy auf, der körperlich zu schwach war, um herumzutollen, und statt dessen wie ein büßender Mönch über seinen Büchern und Papieren saß und noch seine Freude daran zu haben schien. Laplace erkannte bald die phänomenale mathematische Begabung des Knaben und riet ihm, mit seinen Kräften hauszuhalten. Schon ein paar Jahre später lauschte Laplace besorgt Cauchys Darlegungen über unendliche Reihen, weil er fürchten mußte, die Entdeckungen des kühnen jungen Mannes über die Konvergenz könnten möglicherweise das Riesengebäude seiner eigenen Himmelsmechanik zum Einsturz bringen. Das »Weltensystem« entging damals nur um Haaresbreite der Zerstörung - wäre die fast kreisförmige Bahn der Erde nur ein wenig mehr elliptisch gewesen, dann hätten die unendlichen Reihen, auf denen Laplace seine Berechnungen aufbaute, divergiert. Glücklicherweise hatte ihn seine astronomische Intuition vor dieser Katastrophe bewahrt, wie er nach einer eingehenden Überprüfung der Konvergenz aller seiner Reihen nach Cauchys Methode mit einem Seufzer unendlicher Erleichterung feststellte.

Am 1. Januar 1800 wurde Cauchy senior, der heimlich mit Paris Verbindung gehalten hatte, zum Sekretär des Senats gewählt. Sein Amtssitz war im Palais du Luxembourg. Der junge Cauchy durfte in einer Ecke des Büros seinen Studien nachgehen. So kam es, daß er häufig Lagrange begegnete, der damals Professor an der Polytechnique war und oft dienstlich mit Sekretär Cauchy zu tun hatte. Lagrange interessierte sich bald für den Jungen und war gleich Laplace von seiner mathematischen Begabung beeindruckt. Einmal wies Lagrange in Gegenwart von Laplace und anderer Persönlichkeiten auf den jungen Cauchy in seiner Ecke und sagte: »Sehen Sie den kleinen Burschen dort? Er wird uns als Mathematiker alle übertreffen.«

Lagrange gab Cauchy senior einige vernünftige Ratschläge, weil er fürchtete, der zarte Knabe könnte sich vorzeitig erschöpfen: »Lassen Sie ihn kein Mathematikbuch anrühren, bevor er siebzehn ist.« Lagrange meinte die höhere Mathematik. Und bei anderer Gelegenheit: »Wenn Sie Augustin nicht bald eine solide Allgemeinbildung geben, wird seine Neigung ihn fortreißen; er wird ein großer Mathematiker sein, aber unfähig, seine eigene Sprache zu schreiben.« Der Vater nahm sich diesen Rat des größten Mathematikers seiner Zeit zu Herzen und verschaffte seinem Sohn eine gute literarische Bildung, bevor er ihn auf die höhere Mathematik losließ.

Nachdem sein Vater alles für ihn getan hatte, was in seiner Macht stand, trat auch Cauchy mit dreizehn Jahren in die Ecole Centrale du Pantheon ein, wo er bald alle für die besten Leistungen in Griechisch, Latein und anderen humanistischen Fächern ausgesetzten Preise errang.

Nach dem Verlassen dieser Schule studierte er, von einem guten Lehrer angeleitet, intensiv Mathematik und trat 1805 mit sechzehn Jahren als zweitbesten Bewerber in die Polytechnique ein. Dort waren seine Erlebnisse nicht immer erfreulich, denn die gottlosen jungen Lästermäuler verspotteten ihn gnadenlos, weil er seine religiöse Einstellung allzu offen zur Schau stellte. Cauchy blieb jedoch ruhig und suchte sogar einige der Spötter zu bekehren.

Von der Polytechnique übersiedelte Cauchy 1807 in die staatliche Ingenieurschule (Ecole des Ponts et Chaussees) und wurde schon bald für besondere Aufgaben ausersehen. Nach Abschluß seiner Ausbildung erteilte man ihm im März 1810 sofort einen wichtigen Auftrag. Einem so fähigen und einfallreichen jungen Mann räumte man bürokratische Hindernisse aus dem Weg, selbst auf die Gefahr hin, daß mancher Ältere dabei übergangen wurde. Was man über Napoleon sonst auch sagen mag, er förderte Begabungen, wo er sie fand.

Im März 1810, als Cauchy von Paris nach Cherbourg aufbrach, »leicht an Gepäck, doch reich an Hoffnungen«, lag die Schlacht von Waterloo in ferner Zukunft, und Napoleon hoffte immer noch, England durch eine Invasion in die Knie zwingen zu können. Dazu brauchte es aber eine gewaltige Flotte, und diese mußte erst gebaut werden. Befestigte Häfen zum Schutz der Schiffswerften waren die vordringlichste Notwendigkeit für diese hochfliegenden Pläne, deshalb entsandte man den begabten jungen Cauchy als Festungsbaumeister nach Cherbourg.

In seinem leichten Gepäck trug Cauchy nur vier Bücher mit sich, die »Mecanique celeste« von Laplace, den »Traite des fonctions analytiques« von Lagrange, die »Nachfolge Christi« des Thomas a Kempis und ein Exemplar der Werke Vergils - eine ungewöhnliche Zusammenstellung für einen ehrgeizigen jungen Militärtechniker. Die Abhandlung Lagranges war das Buch, durch das sich seine Vorhersage über Cauchy erfüllen sollte, denn es regte den jungen Mathematiker dazu an, eine Theorie der Funktionen zu suchen, die nicht die ins Auge springenden Fehler von Lagranges Arbeiten aufwies.

Seiner besorgten Mutter kamen Gerüchte zu Ohren, daß ihr geliebter Sohn auf dem besten Weg war, ein Ungläubiger oder etwas noch Schlimmeres zu werden. In einem langen Brief voll frommer Gedanken beruhigte sie Cauchy. Der Schluß des Briefes zeigt, daß der heilige Cauchy durchaus fähig war, sich seinen Spöttern gegenüber zu behaupten, die ihn für leicht überspannt hielten.

»Es ist deshalb lächerlich anzunehmen, daß die Religion jemandem den Kopf verdrehen kann, und würde man alle Verrückten ins Irrenhaus schicken, fände man dort mehr Philosophen als Christen.« War das ein Versehen, oder glaubte er wirklich, ein Christ könne kein Philosoph sein? Er schließt mit einem Überschwenken zur anderen Seite seines Wesens: »Aber genug davon es ist mir zuträglicher, an gewissen mathematischen Problemen zu arbeiten.« Ganz richtig, aber jedesmal wenn er eine Windmühle ihre ungeheuren Arme gegen den Himmel recken sah, ritt er eine Attacke dagegen.

Cauchy blieb ungefähr drei Jahre in Cherbourg. Die freie Zeit neben seinen schweren Pflichten nützte er gut. In einem Brief vom 3. Juli 1811 schreibt er: »Ich stehe um vier Uhr auf und bin vom Morgen bis zum Abend tätig ... Die Arbeit ermüdet mich jedoch nicht; im Gegenteil, sie kräftigt mich, und ich bin bei bester Gesundheit.«

Neben seiner ganzen Arbeit zum Ruhme Frankreichs fand Cauchy noch Zeit zur Forschung. Schon im Dezember 1810 hatte er begonnen, »alle Zweige der Mathematik durcharbeiten, von der Arithmetik bis zur Astronomie, Unklarheiten zu beseitigen und (seine eigenen Methoden) zur Vereinfachung der Beweise und zur Entdeckung neuer Sätze anzuwenden.« Und daneben fand dieser erstaunliche junge Mann noch Zeit, andere zu unterrichten, und half sogar dem Bürgermeister von Cherbourg bei der Abhaltung von Schulprüfungen. So lernte er unterrichten.

Die militärischen Rückschläge vor Moskau 1812 und bei Leipzig 1813 lenkten Napoleon von seinem Traum einer Invasion Englands ab und ließen die Arbeiten in Cherbourg erlahmen. 1813 kehrte Cauchy, von Überarbeitung erschöpft, nach Paris zurück. Er war erst 24 Jahre alt, hatte aber bereits die führenden Mathematiker Frankreichs durch seine glänzenden Forschungen auf sich aufmerksam gemacht, insbesondere durch die Abhandlungen über Polyeder und über symmetrische Funktionen. Da das Wesen dieser Arbeiten leicht zu verstehen ist und jede der beiden der heutigen Mathematik überaus wichtige Anregungen lieferte, seien sie hier kurz beschrieben.

Die erste ist an und für sich von geringerem Interesse. Weit bedeutungsvoller ist die außergewöhnlich scharfsinnige Kritik, die Malus dagegen erhob. Durch ein seltsames historisches Zusammentreffen war Malus seiner Zeit genau hundert Jahre voraus, als er in seiner überaus präzisen Art gegen Cauchys Überlegungen Einwände erhob. Die Akademie hatte als Preisaufgabe gestellt, die Theorie der Polyeder »in einem wesentlichen Punkt zu vervollkommen«, und Lagrange hatte dies Cauchy als eine vielversprechende Forschungsarbeit vorgeschlagen. Im Februar 1811 legte Cauchy seine erste Abhandlung darüber vor. Sie verneinte eine von Poinsot (1777-1859) gestellte Frage: Kann es noch andere Polyeder geben als solche mit 4, 6, 8, 12 oder 20 Flächen? Im zweiten Teil dieser Abhandlung erweiterte Cauchy die von Euler angegebene und in allen Schulbüchern über Stereometrie angeführte Formel über den Zusammenhang von Kanten (E), Flächen (F) und Ecken (V) eines Polyeders

$$E + 2 = F + V.$$

Die Arbeit wurde gedruckt. Legendre hielt sehr viel davon und ermutigte Cauchy weiterzumachen, was

dieser in einer zweiten Abhandlung im Januar 1812 tat. Legendre und Malus (1775 bis 1812) waren die Schiedsrichter. Legendre war begeistert und sagte dem jungen Verfasser Großes voraus. Malus dagegen war reservierter.

Etienne Louis Malus war kein berufsmäßiger Mathematiker, sondern ein ehemaliger Pionieroffizier aus den Feldzügen Napoleons in Ägypten und Deutschland, der durch die zufällige Entdeckung der Polarisierung des Lichtes durch Reflexion berühmt geworden war. So hielt der junge Cauchy seine Einwände vielleicht für Spitzfindigkeiten, wie sie eben von einem eigensinnigen Physiker zu erwarten waren. Zum Beweis seiner wichtigsten Sätze hatte sich Cauchy der »indirekten Methode« bedient, die allen Anfängern in der Geometrie vertraut ist. Gerade gegen diese Art der Beweisführung wandte sich Malus.

Durch die indirekte Methode wird aus der als unrichtig angenommenen Behauptung ein Widerspruch abgeleitet, wonach gemäß der aristotelischen Logik folgt, daß die Behauptung richtig ist. Cauchy konnte die Einwände nicht widerlegen, indem er direkte Beweise lieferte, und Malus gab nach - immer noch nicht überzeugt, daß Cauchy irgendetwas bewiesen hatte. Wenn es Malus 1812 nicht gelang, Cauchy zu zeigen, worum es ging, so wurde er 1912 von Brouwer gerächt, als dieser einigen der Nachfolger Cauchys in der mathematischen Analysis einwandfrei bewies, daß da noch etwas zu beachten war. Die aristotelische Logik ist, wie schon Malus Cauchy beibringen wollte, in der Mathematik nicht immer eine sichere Methode der Beweisführung.

Bevor wir nun zur Theorie der Substitutionen übergehen, die Cauchy systematisch begann und in den vierziger Jahren in einer langen Reihe von Arbeiten entwickelte, aus denen schließlich die Theorie der endlichen Gruppen entstand, wollen wir an einem einfachen Beispiel die ihr zugrunde liegenden Begriffe veranschaulichen....(Jetzt folgen die Gruppenaxiome.)

Um eine solche Gruppe zu veranschaulichen, nehmen wir ein sehr einfaches Beispiel von Permutationen (Anordnungen) von Buchstaben. Dies erscheint uns vielleicht als Spielerei, doch man fand heraus, daß solche Permutations- oder Substitutionsgruppen der langgesuchte Schlüssel zur algebraischen Lösbarkeit von Gleichungen sind. ....

Ein grundlegender Satz von Cauchy: Die Ordnung jeder Untergruppe ist ein Divisor der Ordnung der Gruppe.

Der Leser mag versuchen, Gruppen für andere Ordnungen als 6 zusammenzustellen. Für jede gegebene Ordnung ist die Zahl der verschiedenen Gruppen (d. h. solcher mit verschiedenen Multiplikationstafeln) endlich; wie diese Zahl jedoch für eine beliebige Ordnung (die allgemeine Ordnung  $n$ ) lautet, ist nicht bekannt und wird wahrscheinlich auch nicht gefunden werden, so lange wir leben. So stoßen wir schon bei den Anfangsgründen einer Theorie, die scheinbar einfach ist wie das Dominospiel, auf ungelöste Probleme.

Die abstrakte Betrachtungsweise von Gruppen ist heute allgemein üblich. Sie wurde nicht von Cauchy, sondern erst 1854 von Cayley eingeführt. Auch wurden erst im ersten Jahrzehnt unseres Jahrhunderts befriedigende Reihen von Postulaten für Gruppen aufgestellt.

Interpretiert man die Operationen einer Gruppe z.B. als Rotationen eines festen Körpers, dann nennt man diese Interpretation eine Realisierung der durch die Multiplikationstafel definierten abstrakten Gruppe. Eine gegebene abstrakte Gruppe kann viele verschiedene Realisierungen haben. Dies ist einer der Gründe für die überragende Bedeutung der Gruppen in der modernen Mathematik. Eine einzige, dem Ganzen zugrunde liegende, in der Multiplikationstafel zusammengefaßte Struktur einer und derselben Gruppe bildet den Kern mehrerer anscheinend nicht miteinander zusammenhängender Theorien, und durch ein intensives Studium der Eigenschaften der abstrakten Gruppe läßt sich ein Kenntnis der betreffenden Theorien und ihrer gegenseitigen Beziehungen durch eine einzige Untersuchung anstatt durch mehrere erreichen.

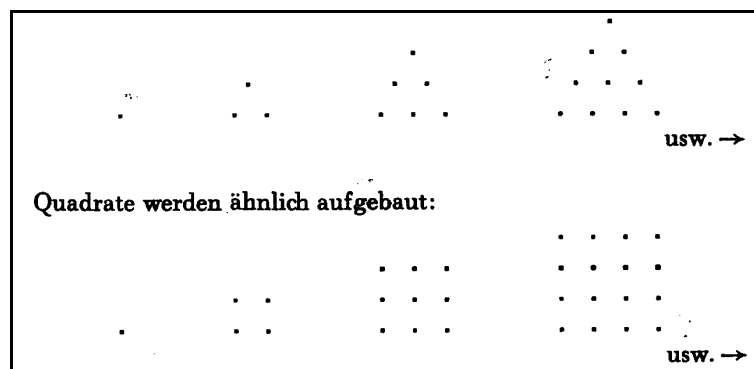
Beispielsweise bildet die Gesamtheit aller Rotationen eines regelmäßigen Ikosaeders (Zwanzigflächners)

um seine Symmetrieachsen, so daß nach jeder Rotation der Körper wieder dieselbe Lage einnimmt, eine Gruppe, und diese Gruppe von Rotationen, abstrakt ausgedrückt, ist dieselbe wie jene, die als Permutation der Wurzeln erscheint, wenn wir versuchen, die allgemeine Gleichung fünften Grades zu lösen. Außerdem taucht die gleiche Gruppe (wenn wir ein wenig vorgreifen) in der Theorie der elliptischen Funktionen auf. Dies läßt darauf schließen, daß es zwar unmöglich ist, die allgemeine Gleichung fünften Grades algebraisch zu lösen, die Gleichung jedoch in Ausdrücken der erwähnten Funktionen lösbar sein könnte - und tatsächlich ist es so. Schließlich kann dies alles durch die Beschreibung der Rotationen des bereits erwähnten Ikosaeders geometrisch dargestellt werden. **Diese schöne Gesamtbetrachtung war das Werk von Felix Klein (1849-1925) in seinem Buch über das Ikosaeder (1884).** .....

..... und eine bestimmte Schule der Quantenmechanik findet in der Theorie der Substitutionsgruppen eine befriedigende Grundlage für die Erklärung der Spektren (und anderer mit dem Aufbau des Atoms zusammenhängender Erscheinungen). Cauchy ahnte natürlich nichts von solchen Anwendungen dieser Theorie genausowenig wie von ihrer Anwendung auf das noch zu lösende Rätsel der algebraischen Gleichungen. Dieser Triumph war einem jungen Burschen vorbehalten, dem wir später noch begegnen werden.

Mit seiner 1814 erschienenen Abhandlung über bestimmte Integrale mit komplexen Zahlen als Grenzen stieg Cauchy in die Reihe der führenden Mathematiker seiner Zeit auf. Der einzig ernsthafte Rivale des Siebenundzwanzigjährigen war der schweigsame Gauß, zwölf Jahre älter als er, der 1811 zu diesem grundlegenden Satz gelangt war, drei Jahre vor Cauchy.

Im Jahr darauf (1815) erregte Cauchy Aufsehen, als er einen der großen Sätze bewies, die Fermat einer ratlosen Nachwelt hinterlassen hatte: Jede positive ganze Zahl ist die Summe von drei »Dreiecken«, vier »Quadraten«, fünf »Fünfecken«, sechs »Sechsecken« usw., wobei Null in jedem Fall als Zahl der betreffenden Art mitgezählt wird. Ein »Dreieck« ist eine der Zahlen 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21.... die man erhält, indem man aus Punkten regelmäßige (gleichseitige) Dreiecke aufbaut:



Auf ähnliche Weise bildet man aus Punkten regelmäßige »Fünfecke« und ebenso für »Sechsecke« usw. Dies war nicht leicht zu beweisen, und tatsächlich waren Euler, Lagrange und Legendre daran gescheitert. Gauß hatte dies schon früh für das Dreieck bewiesen.

1816 errang Cauchy den großen Preis der Akademie für eine »Theorie der Ausbreitung von Wellen auf der Oberfläche einer schweren Flüssigkeit unbegrenzter Tiefe«. Damit zeigte er, daß er nicht nur in der reinen Mathematik Hervorragendes leistete. Das Werk umfaßte 300 Druckseiten. Mit 27 Jahren sah sich Cauchy von allen Seiten gedrängt, für die Akademie der Wissenschaften zu kandidieren - eine höchst ungewöhnliche Ehre für einen so jungen Mann. Der erste freie Sitz in der mathematischen Abteilung würde ihm zufallen, versicherte man ihm unter der Hand. Dies war der Höhepunkt der Popularität in seiner Laufbahn.

1816 war Cauchy also reif zur Wahl in die Akademie; es war jedoch keine Stelle frei. Immerhin konnte man jedoch erwarten, daß wegen des hohen Alters ihrer Inhaber zwei Sitze bald frei würden. Monge war

siebzig, L. M. N. Carnot dreiundsechzig. Monge sind wir bereits begegnet. Carnot verdankte seinen Sitz den Forschungen, durch die er die synthetische Geometrie von Pascal und Desargues wieder herstellte und erweiterte, und für sein Bemühen, die Infinitesimalrechnung auf eine feste logische Grundlage zu stellen. Außerhalb der Mathematik machte sich Carnot in der französischen Geschichte einen bedeutenden Namen, denn durch seine geniale Tatkraft stampfte er 1793 vierzehn Armeen aus dem Boden, um sie der halben Million Mann entgegenzustellen, die die vereinten antidemokratischen Reaktionäre Europas gegen Frankreich aufgeboten hatten. Als Napoleon die Macht an sich riß, wurde Carnot verbannt, weil er sich dem Tyrannen widersetzte: »Ich bin ein unversöhnlicher Feind aller Könige«, sagte Carnot.

Im Zuge der Reorganisation der Akademie der Wissenschaften während des politischen Umsturzes nach Napoleons »Hundert Tagen« wurden Carnot und Monge ausgestoßen. Carnots Nachfolger nahm seinen Sitz ohne besonderes Aufsehen ein; als sich jedoch der junge Cauchy seelenruhig auf Monges Platz niederließ, brach der Sturm los. Die Vertreibung Monges war ein Akt reiner politischer Willkür, und wer immer daraus Nutzen zog, dem sprach man zumindest feineres Gefühl für Anstand ab. Cauchy fühlte sich natürlich im Recht, auch vor seinem Gewissen.

Als Verehrer der Bourbonen und in seinem Glauben, die Dynastie sei direkt vom Himmel gesandt, um Frankreich zu regieren, selbst wenn der Himmel dazu einen unfähigen Hanswurst auserkor wie jenen KarlX., erfüllte Cauchy nur getreu seine Pflicht gegenüber dem Himmel und Frankreich, wenn er Monges Sitz einnahm. Daß er, aufrichtig und nicht nur selbstsüchtig war, geht aus seiner späteren Ergebenheit dem gesalbten Karl gegenüber hervor.

Nun überhäufte man den größten Mathematiker Frankreichs, der noch keine dreißig Jahre zählte, in rascher Folge mit ehrenvollen und wichtigen Ämtern. Seit 1815 hatte er, an der Polytechnique über Analysis gelesen. Nun wurde er Professor und las bald auch am College de France und an der Sorbonne. Alles verlief nach Wunsch. Seine Schaffenskraft als Mathematiker war unglaublich; manchmal unterbreitete er in einer einzigen Woche der Akademie zwei volle Abhandlungen. Zusätzlich zu seinen eigenen Forschungen schrieb er zahllose Berichte über Abhandlungen, die von anderen der Akademie vorgelegt wurden; dazwischen fand er noch Zeit zu einer fast ununterbrochenen Folge von kurzen Aufsätzen über so gut wie alle Gebiete der Mathematik. Er wurde bei den Mathematikern Europas besser bekannt als Gauß, und zu seinen Hörern zählten bekannte Mathematiker aus Berlin, Madrid und Petersburg.

Inmitten all dieser Arbeit fand Cauchy noch Zeit zu freien. Seine Auserwählte, Aloise de Bure, die er 1818 heiratete und mit der er vierzig Jahre lebte, entstammte einer alten, hochgebildeten Familie und war gleich ihm glühend katholisch. Sie hatten zwei Töchter, die so erzogen wurden wie er selbst.

**Ein großes Werk aus dieser Zeit muß erwähnt werden. Angeregt von Laplace und anderen stellte Cauchy 1821 die von ihm an der Polytechnique gehaltenen Vorlesungen über Analysis zur Veröffentlichung zusammen. Dieses Werk war lange Zeit richtungweisend für wissenschaftliche Strenge. Selbst heute findet man noch Cauchys Definitionen von Grenzwerten und Kontinuität und vielem anderen, was er in dieser Vorlesungsreihe über Konvergenz und unendliche Reihen sagte, in jedem sorgfältig geschriebenen Buch über die Infinitesimalrechnung.**

Ein Auszug aus dem Vorwort zeigt, was ihm vorschwebte und was er vollbrachte.

»Ich bemühte mich, den Methoden (der Analysis) die ganze Strenge zu geben, die in der Geometrie verlangt wird, indem ich mich nie auf die Gründe verließ, die sich aus der Allgemeinheit der Algebra ergeben. (Heute würde man sagen, aus dem Formalismus der Algebra.) Gründe dieser Art können, obwohl man sie nur allzuoft zuläßt, vor allem beim Übergang von konvergierenden zu divergierenden Reihen und von reellen Größen zu imaginären, wie mir scheint, nur als Annahmen betrachtet werden, die manchmal zur Wahrheit führen, im übrigen aber nur wenig mit der vielgerühmten Exaktheit der Mathematik gemeinsam haben. Auch ist zu beachten, daß man dazu neigt, algebraischen Formeln unbe-

schränkte Gültigkeit beizumessen, während in Wirklichkeit die Mehrzahl dieser Formeln nur unter gewissen Bedingungen und für gewisse Werte der in ihnen vorkommenden Größen gelten. Durch Bestimmung dieser Bedingungen und Werte sowie durch genaues Festlegen der Bedeutung der von mir verwendeten Schreibweise werde ich alle Unsicherheit beseitigen.«

Cauchy schrieb so viel, daß er eine viel gekaufte eigene Zeitschrift gründen mußte, die »Exercices de Mathematique« (1826 bis 1830), und später die »Exercices d'Analyse Mathematique et de Physique«. 1835 begann dann die Akademie der Wissenschaften, ihr wöchentliches Bulletin zu veröffentlichen (die »Comptes rendus«). Bald überschwemmte er auch diese mit Artikeln und langatmigen Abhandlungen - manchmal mehr als einer pro Woche. **Angesichts der steigenden Druckkosten erließ die Akademie die noch heute gültige Regel, daß kein Artikel länger als vier Seiten sein durfte.**

Cauchy sah sich zur Straffung seines weitschweifigen Stils genötigt und veröffentlichte seine längeren Abhandlungen, darunter eine von 300 Seiten über die Zahlentheorie, anderweitig.

Alles schien für ihn zum Besten zu stehen, als die Revolution von 1830 seinen geliebten Karl aus dem Sattel hob. Das Schicksal leistete sich kaum je einen größeren Scherz: Es bewog Cauchy, vom Sitz Monges aufzustehen und seinem gesalbten König ins Exil zu folgen. Cauchy konnte sich nicht weigern; er hatte Karl einen feierlichen Treueid geschworen, und für Cauchy war ein Eid eben ein Eid, selbst wenn er ihn einem tauben Esel geschworen hatte. Man muß es ihm jedoch hoch anrechnen, daß er mit vierzig Jahren auf alle seine Ämter verzichtete und freiwillig ins Exil ging.

Der Abschied fiel ihm freilich nicht allzu schwer. Das Blut in den Straßen von Paris hatte ihm seinen empfindlichen Magen umgedreht. Er glaubte auch fest, daß der gute König Karl in keiner Weise für das blutige Chaos verantwortlich war.

Ohne formell auf seinen Sitz zu verzichten, begab er sich zunächst in die Schweiz; seine Familie ließ er in Paris. Bald darauf erfuhr ein klügerer Karl, der König von Sardinien, daß der berühmte Cauchy ohne Stelle war, und machte ihn zum Professor für mathematische Physik in Turin. Cauchy war vollkommen glücklich. Rasch lernte er Italienisch und hielt seine Vorlesungen in dieser Sprache.

Eben als er von einem kurzen Krankenurlaub nach Turin zurückkehrte, um sein dem Lehren und Forschen gewidmetes Leben wieder aufzunehmen, brach der tölpische Karl X. wie ein hirnloser Ziegenbock in das zurückgezogene Leben des Mathematikers ein und erwies ihm, in der Absicht, seinen treuen Gefolgsmann zu belohnen, einen überaus schlechten Dienst. 1833 betraute er Cauchy mit der Erziehung seines Erben, des dreizehnjährigen Herzogs von Bordeaux; Kindermädchen und Schulmeister zu spielen wäre das Letzte gewesen, nach dem Cauchy sich sehnte. Dennoch meldete er sich pflichtgetreu bei Karl in Prag. Seine Familie ließ er nachkommen.

Die Erziehung des Erben der Bourbonen war kein Honiglecken. Von früh bis spät mußte Cauchy sich abmühen, dem widerspenstigen königlichen Bengel seine Lektionen einzubleuen und dabei noch darauf zu achten, daß sich sein Schützling beim Herumtollen nicht die Knie abschürfte. Wie nicht anders zu erwarten, bestand seine Erziehung größtenteils in Zwiegesprächen über die besondere Art der Moralphilosophie, der er selbst ergeben war; so war es letzten Endes für Frankreich vielleicht doch besser, daß es nicht mehr die Bourbonen ins Herz schloß, sondern sie und ihre zahllosen Nachkommen dem internationalen Heiratsmarkt für Millionärstöchter überließ.

Daneben gelang es Cauchy doch noch, sich manchmal ein paar Augenblicke für die Mathematik zu stehlen und rasch eine Formel oder ein paar Sätze hinzukritzeln. Das eindrucksvollste Werk aus dieser Zeit war die lange Abhandlung über die Dispersion des Lichtes, in der er versuchte, die Erscheinungen der Zerlegung des weißen Lichtes durch die Hypothese zu erklären, daß das Licht durch Schwingungen eines elastischen festen Mediums entstehe. Dieses Werk ist ein Beispiel für das Bestreben in der Physik des 19. Jahrhunderts, physikalische Erscheinungen eher an einem mechanischen Modell aufzubauen, als abstrakt zu betrachten.



Heute geht die Tendenz in die gegenteilige Richtung einer rein mathematischen Korrelation; man verzichtet auf den Weltäther, auf elastisch-feste Medien oder andere »mechanische« Erklärungen, die schwieriger zu erklären sind als die Erscheinung selbst. Immerhin war der Theorie vom elastisch-festen Medium ein langer und glänzender Erfolg beschieden, und einige der Formeln, die Cauchy aus dieser an sich falschen Hypothese ableitete, werden sogar noch heute verwendet. Die Theorie selbst wurde jedoch aufgegeben, als, wie es nicht selten geschieht, eine verfeinerte Experimentiertechnik und unerwartete Erscheinungen mit den Voraussagen der Theorie nicht mehr in Einklang zu bringen waren.

1838 entrann Cauchy seinem Schüler. Freunde in Paris hatten ihn schon längst zur Rückkehr gedrängt, und Cauchy benützte die goldene Hochzeit seiner Eltern als Vorwand, Karl und seinem Gefolge Adieu zu sagen. Die Mitglieder des Institut de France (zu dem die Akademie gehörte und heute noch gehört) waren vom Treueid gegenüber der Regierung dispensiert, und so nahm Cauchy seinen Sitz wieder ein. Seine Tätigkeit als Mathematiker wurde umfangreicher als je zuvor. In den letzten neunzehn Jahren seines Lebens verfaßte er mehr als 500 Arbeiten über alle Zweige der Mathematik sowie über Mechanik, Physik und Astronomie. Viele dieser Arbeiten waren lange Abhandlungen.

Seine Schwierigkeiten waren jedoch nicht vorüber. Als am College de France eine Stelle frei wurde, wählte man ihn einstimmig dafür. Hier galt jedoch der Dispens nicht, und bevor er die Stelle antreten konnte, hätte er den Treueid leisten müssen. Da er nach wie vor die Meinung vertrat, die Regierung habe die gottgegebenen Rechte seines Herrn usurpiert, verweigerte er den Eid. Wieder war er ohne Stelle. Aber das Bureau des Longitudes konnte einen Mathematiker seines Formats gebrauchen. Wieder wurde er einstimmig gewählt.

Damit begann ein amüsanter Tauziehen zwischen Cauchy und dem Bureau des Longitudes einerseits und der ungesalbten Regierung andererseits. Um sich nicht lächerlich zu machen, gab die Regierung nach, und Cauchy konnte ohne Eid sein Amt antreten. Widerstand gegen die Regierung war ein schweres Vergehen, um nicht zu sagen Verrat, aber Cauchy blieb im Amt. Seine Kollegen brachten die Regierung in Verlegenheit, als sie höflich die Aufforderung ignorierten, jemanden nach den gesetzlichen Vorschriften zu wählen. Vier Jahre lang widerstand Cauchy der Regierung halsstarrig und setzte seine Arbeit fort.

In diese Zeit fallen einige seiner bedeutendsten Beiträge zur mathematischen Astronomie. Leverrier hatte der Akademie (1840) eine lange Abhandlung über den Planeten Pallas unterbreitet; das Werk war gespickt mit zahlenmäßigen Berechnungen, zu deren Nachprüfung jeder Begutachter mindestens ebenso lange gebraucht hätte wie zuvor der Verfasser. Cauchy erklärte sich sogleich bereit, diese Riesenarbeit zu übernehmen. Anstatt jedoch Leverriers Wegen zu folgen, fand er bald Vereinfachungen und neue Methoden, die es ihm ermöglichten, das Werk in bemerkenswert kurzer Zeit zu überprüfen und zu ergänzen.

1843, als Cauchy 54 Jahre alt war, trieb der Konflikt mit der Regierung seinem Höhepunkt zu. Der Minister wollte sich nicht mehr länger zum Gespött der Öffentlichkeit machen lassen und verlangte vom Bureau, eine Wahl abzuhalten, um die Stelle zu besetzen, die aufzugeben Cauchy sich weigerte. Auf Rat seiner Freunde unterbreitete Cauchy seine Auffassung der Öffentlichkeit in einem offenen Brief. Dieser Brief zählt zum Besten, was Cauchy jemals schrieb.

Man mag über sein Don-Quijote-artiges Eintreten für eine Sache, von der jeder außer einem unbelehrbaren Reaktionär wußte, daß sie verloren war, denken wie man will; doch nötigt uns seine furchtlose Art, seinen eigenen Standpunkt und die Freiheit seines Gewissens würdig und sachlich zu verteidigen, Achtung ab. Es war der alte Kampf für die Freiheit des Denkens, in einer Form, die damals im Gegensatz zu heute nicht sehr verbreitet war.

**Zur Zeit Galileis wäre Cauchy zweifellos auf den Scheiterhaufen gestiegen**, um die Freiheit seiner Überzeugung zu bewahren; unter Louis Philipp sprach er jeder Regierung das Recht ab, einen Treueid zu

fordern, der mit dem Gewissen in Widerspruch stand. Seine Festigkeit gewann ihm die Achtung seiner Feinde und brachte die Regierung sogar in den Augen ihrer Anhänger in Mißkredit. Bald wurde der Regierung die Unsinnigkeit der Unterdrückung in einer Form klargemacht, die sie begreifen konnte - Straßenkämpfe, Aufruhr, Streiks und Aussperrung. 1848 wurden Louis Philipp und sein ganzer Klüngel abgesetzt. Eine der ersten Taten der provisorischen Regierung war die Abschaffung des Treueides. Mit seltener Klugheit erkannten die Politiker, daß alle solchen Eide entweder unnötig oder wertlos sind.

1852 jedoch, als Napoleon III. die Macht übernahm, wurde der Eid wieder eingeführt. Inzwischen hatte aber Cauchy seinen Kampf gewonnen. Man ließ ihn unter der Hand wissen, er könne seine Vorlesungen wieder aufnehmen, ohne den Eid zu leisten. In beiderseitigem Einverständnis machte man kein Aufheben von der Sache. Die Regierung verlangte keinen Dank für ihr Entgegenkommen, und Cauchy fühlte sich dazu auch nicht bemüßigt, sondern hielt weiter seine Vorlesungen als wäre nichts gewesen. Von da an bis zum Ende seines Lebens war er das Prunkstück der Sorbonne.

Der Ruf großer Mathematiker unterliegt den gleichen Schwankungen wie der anderer großer Männer. Lange Zeit nach seinem Tod und sogar noch in unserer Zeit hat man Cauchy wegen seiner Überproduktion und flüchtigen Ausarbeitung heftig kritisiert, denn sein Gesamtwerk umfaßt 789 Arbeiten, darunter viele sehr ausgedehnte, und füllt insgesamt 24 große Quartbände. Eine solche Kritik scheint jedoch recht abwegig, wenn ein Mann zum überwiegenden Teil erstklassige Arbeiten geschrieben hat. **Cauchy steht für die moderne Mathematik unmittelbar im Rampenlicht, was heute allgemein, wenn auch manchmal widerwillig, anerkannt wird. Seit seinem Tod ist sein Ruhm als Mathematiker ständig gestiegen. Die von ihm eingeführten Methoden, sein ganzes Programm, das die erste Periode moderner Exaktheit einleitete sowie sein fast unübertroffener Einfallsreichtum haben der Mathematik einen Stempel aufgedrückt, der, soweit wir es jetzt überblicken können, noch lange gültig sein wird.**

Im Umgang mit Menschen war Cauchy überaus höflich, gelegentlich auch salbungsvoll. Sein Wesen war in allem gemäßigt außer in Mathematik und Religion. Jeden, der ihm nahekam, versuchte er zu bekehren. Als William Thomson (**Lord Kelvin**) einmal als junger Mann bei Cauchy vorsprach, um mathematische Fragen zu erörtern, bemühte er sich während dieser ganzen Zeit, seinen Besucher - damals ein getreuer Anhänger der Freien Schottischen Kirche - zum Katholizismus zu bekehren.

Noch eine andere Eigenart trug dazu bei, Cauchy bei seinen Kollegen unbeliebt zu machen. In wissenschaftlichen Akademien und Gesellschaften erwartete man von einem Mann, daß er für einen Kandidaten nur auf Grund wissenschaftlicher Verdienste seine Stimme abgibt; jede andere Haltung gilt als verwerflich. Man hat Cauchy beschuldigt, nach seinen religiösen und politischen Ansichten zu urteilen. Seine letzten Jahre wurden ihm vergällt, weil er sich wegen dieser und ähnlicher Schwächen mit seinen Kollegen nicht recht verstand. Keine der beiden Seiten konnte die Ansichten des andern ganz begreifen.

Cauchy starb ziemlich unerwartet am 23. Mai 1857 im 68. Lebensjahr. Er war, um sich von einer Erkältung zu erholen, aufs Land gefahren; dort befiel ihn ein Fieber, das ihn ins Grab brachte. Noch ein paar Stunden vor seinem Tod unterhielt er sich angeregt mit dem Erzbischof von Paris über die karitativen Unternehmungen, die er plante. Seine letzten Worte waren an den Erzbischof gerichtet - »Menschen vergehen, aber ihre Taten bleiben.«

Quelle: Eric Temple **Bell**: „Berühmte Mathematiker“