Achilles und die Schildkröte

Achilles läuft 10 $\frac{m}{s}$, die Schildkröte 1 $\frac{m}{s}$ (sie ist also recht schnell). Die Schildkröte hat 10 m Vorsprung vor Achilles.

Zenon: Achilles kann die Schildkröte nicht einholen, denn die Schildkröte ist schon weg, wenn Achilles diejenige Strecke zurückgelegt hat, die der Vorsprung zu Beginn des Wettrennens betrug. Die Schildkröte hat nun immer noch einen Vorsprung. Bis Achilles diesen eingeholt hat, ist die Schildkröte schon wieder weg, ...

Betrachten wir die Zeiten, die hier eine Rolle spielen:

Den ersten Vorsprung hat Achilles in 1 s eingeholt. Um den zweiten Vorsprung einzuholen, braucht er 0,1 s, für den dritten 0,01 s, für den vierten 0,001 s, ...
Wir zählen die Zeiten zusammen, die Achilles jeweils braucht: Um den 10. Vorsprung einzuholen, braucht er $\left(\frac{1}{10}\right)^9$ s. - Für den n. Vorsprung $\left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$ s.

Für die Maßzahl der Gesamtzeit bis dahin ergibt sich:

$$t_n = 1 + \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)\cdot t_n = \left(\frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \left(\frac{1}{10}\right)^4 + \ldots + \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad t_n - \left(\frac{1}{10}\right)\cdot t_n = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

Ich hoffe, jeder sieht, wie sich hier alles in Wohlgefallen auflöst (1.Zeile - 2.Zeile !).

$$t_n \cdot \left(1 - \frac{1}{10}\right) = 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad t_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}$$

Natürlich wird t_n immer größer, weil der Zähler immer größer wird. Aber der Zähler kann ja nicht beliebig groß werden.
Die Zeit ist nach oben beschränkt: $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right] = 1$, da die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} := \left\{\left(\frac{1}{10}\right)^n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Es gilt also:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} t_n = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}}$$

Nach $\frac{10}{9}$ s (= 1,1111111111..... s) hat Achilles die Schildkröte eingeholt.