Spielerei mit Dreiecksspiegelungen

und die Folgerungen - oder - was hat Napoleon mit Dreiecken zu tun?

1) Zeichne in dein Heft ein beliebiges Dreieck (bitte nicht zu klein und etwa in die Mitte einer Seite).

Spiegele danach das Dreieck 3-mal, und zwar einmal an der Spiegelachse g(A,B), ein weiteres Mal an der Spiegelachse g(B,C) und ein letztes Mal an der Spiegelachse g(A,C).

Nenne die neu konstruierten Punkte P, Q und R, und bezeichne die Winkel wie folgt:

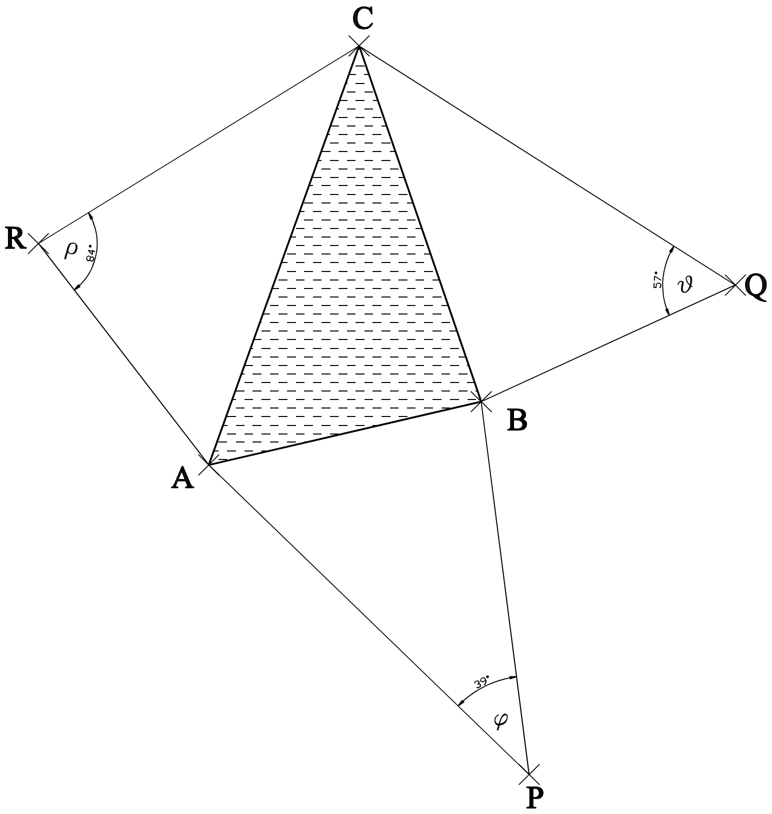
$$\varphi := \sphericalangle BPA$$

$$\vartheta := \sphericalangle CQB$$

$$\varrho := \sphericalangle ARC$$

Begründe, dass gilt:

$$\overline{\varphi} + \overline{\vartheta} + \overline{\varrho} = 180°$$



---

2) Konstruiere die drei Umkreise zu den drei Dreiecken:

ΔPBA

ΔQCB

ΔRAC

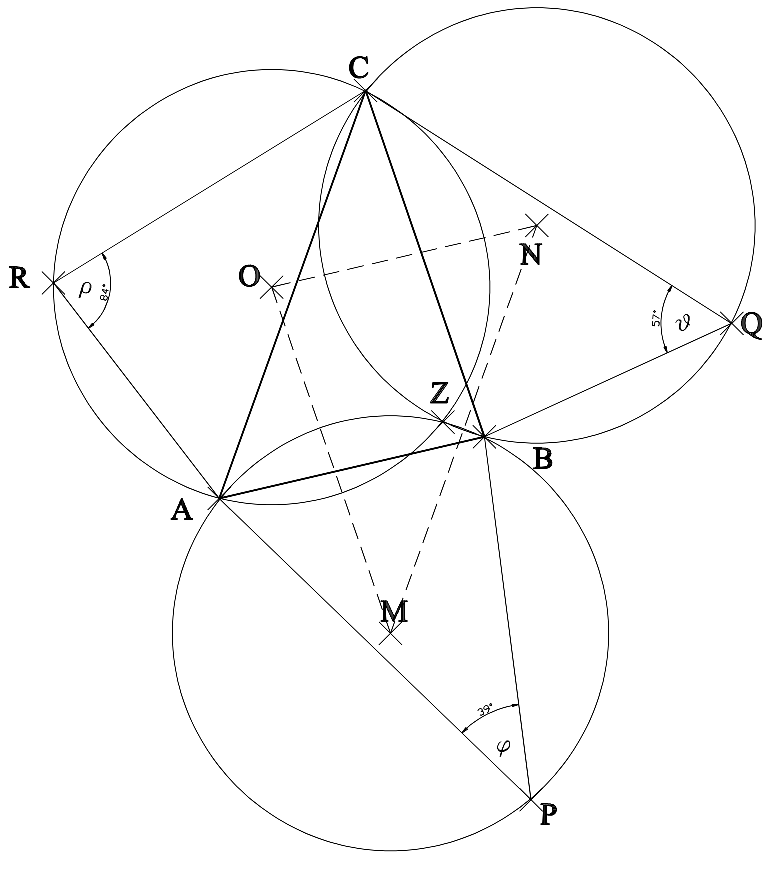
und bezeichne die Mittelpunkte der drei Umkreise mit M, N und O.

Kennzeichne nun das Dreieck:

ΔMNO

und untersuche die Gesamtfigur auf Besonderheiten.

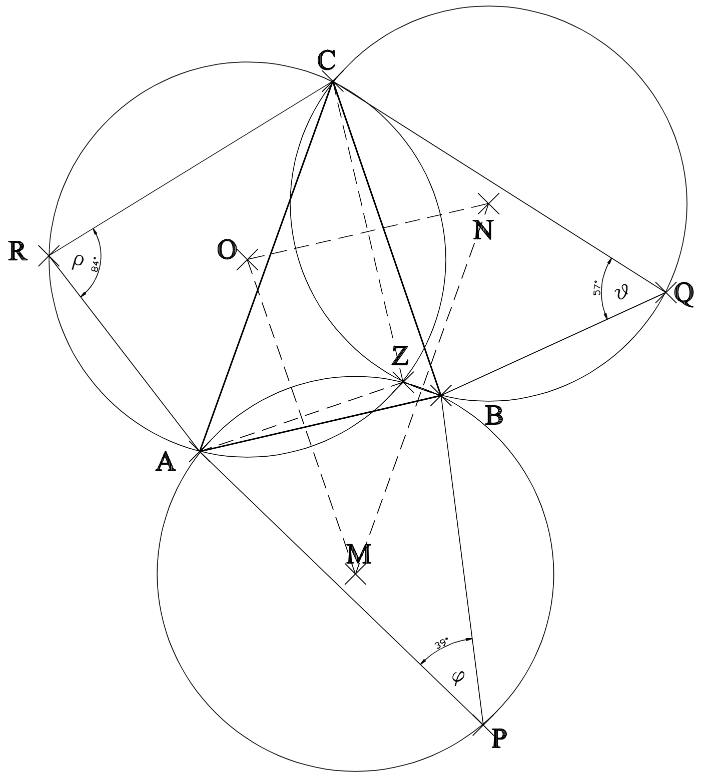
Haben deine Nachbarn in ihrer Figur auch etwas entdeckt? - Ist ihre Skizze mit deiner vergleichbar?



Spielerei mit Dreiecksspiegelungen

und die Folgerungen - oder - was hat Napoleon mit Dreiecken zu tun?

Es sieht so aus, als schnitten sich alle 3 Kreise in einem Punkt Z und außerdem scheint das Dreieck ΔNOM ähnlich zum Dreieck ΔABC zu sein!



Wir wollen zunächst einmal voraussetzen, dass Z der Schnittpunkt von **2** Kreisen ist, nämlich:

$$\{Z\} := k(M;r) \cap k(N;r)$$

3) Verbinde in deiner Skizze Z mit den Eckpunkten des Ausgangsdreiecks ΔABC und begründe die folgenden Schritte:

a) $\overline{\sphericalangle AZB} = 180° - \overline{\varphi}$

b) $\overline{\sphericalangle BZC} = 180° - \overline{\vartheta}$

c) $\overline{\sphericalangle CZA} = 360° - 180° + \overline{\varphi} - 180° + \overline{\vartheta}$
$= \overline{\varphi} + \overline{\vartheta}$
$= 180° - \overline{\varrho}$

d) Aus dem letzten Ergebnis folgt nun, dass Z auch auf dem Kreis k(O ; r) liegen muss.

e) $(AZ \perp OM) \wedge (BZ \perp MN) \wedge (CZ \perp ON)$

f) $\overline{\sphericalangle NMO} = \overline{\varphi}$

$\overline{\sphericalangle ONM} = \overline{\vartheta}$

$\overline{\sphericalangle MON} = \overline{\varrho}$

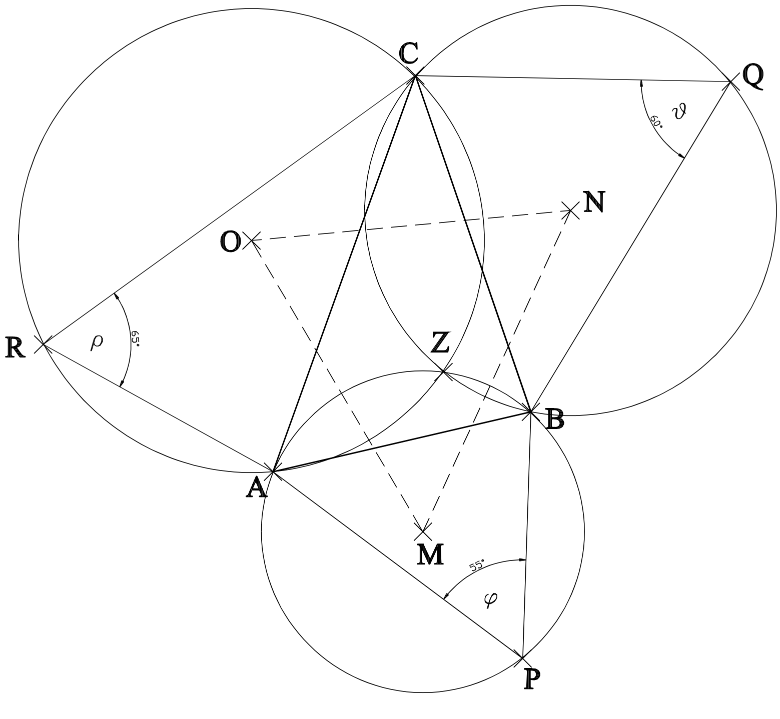
g) ΔABC ≅ΔNOM

---

4) Zeichne eine neues, beliebiges Dreieck. Füge nun an jeder Dreiecksseite ein weiteres Dreieck an mit der Vorschrift, dass die Winkelsumme der Winkel in den neu hinzu gekommenen Punkten 180° ergibt.

Beweise erneut:

Die 3 Umkreise der 3 neuen (nun nicht mehr gespiegelten) Dreiecke, schneiden sich in einem Punkt.

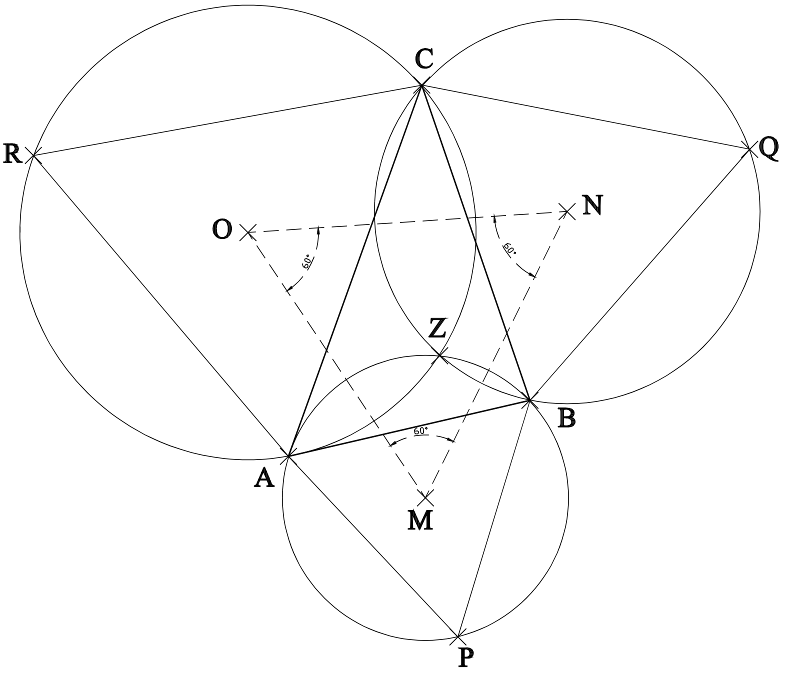


Spielerei mit Dreiecksspiegelungen

und die Folgerungen - oder - was hat Napoleon mit Dreiecken zu tun?

Man sollte es nicht für möglich halten, dass sich Napoleon I auch mit Geometrie beschäftigt hat.

Eine ihm zugeschriebene Konstruktion fügt an die Seiten eines Dreiecks **gleichseitige** Dreiecke an.
Das Dreieck, gebildet aus den 3 Mittelpunkten der Umkreise der angefügten 3 gleichseitigen Dreiecke heißt deshalb <u>äußeres</u> Napoleon-Dreieck, wenn man die gleichseitigen Dreiecke nach außen legt.



5) Beweise:

Das äußere Napoleon-Dreieck ist gleichseitig.

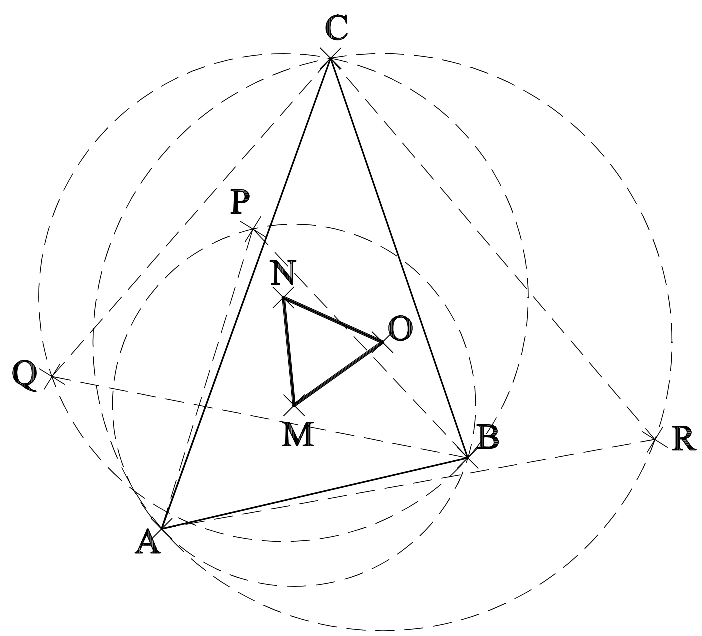
6) Zeige, dass für die Radien der 3 Umkreise gilt: $\overline{BN} = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $\overline{CO} = \frac{b}{\sqrt{3}}$; $\overline{AM} = \frac{c}{\sqrt{3}}$.

7) Bestätige:

$$\left(\overline{ON}\right)^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}\cdot b\cdot a\cdot\cos(\gamma+60°)$$
$$\left(\overline{OM}\right)^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3}\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha+60°)$$
$$\left(\overline{MN}\right)^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}\cdot c\cdot a\cdot\cos(\beta+60°)$$

und berechne den Flächeninhalt des äußeren Napoleon Dreiecks.

Fügt man die gleichseitigen Dreiecke innen an den Seiten des Dreiecks ΔABC an und konstruiert wieder das Dreieck, gebildet aus den Mittelpunkten der Umkreise, so heißt dieses Dreieck nun <u>inneres</u> Napoleon-Dreieck.



8) Begründe, dass die Punkte M, O, N des Napoleon-Dreiecks nun sinnvollerweise anders orientiert sind und dass nunmehr gilt:

$$\left(\overline{ON}\right)^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}\cdot b\cdot a\cdot\cos(\gamma-60°)$$
$$\left(\overline{OM}\right)^2 = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - \frac{2}{3}\cdot b\cdot c\cdot\cos(\alpha-60°)$$
$$\left(\overline{MN}\right)^2 = \frac{c^2}{3} + \frac{a^2}{3} - \frac{2}{3}\cdot c\cdot a\cdot\cos(\beta-60°)$$

(Das ist schon ganz schön kniffelig; denke an Spiegelungen! - Wer dass schafft ... Bravo !)

Eigentlich legt die sehr ähnliche Struktur der Ausdrücke für die Seitenlängen des äußeren und des inneren Napoleon-Dreiecks die Differenz nahe und dabei ergibt sich der folgende Ausdruck (z.B. für ON):

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{2}{3}\cdot b\cdot a\cdot\left[\ \cos(\gamma-60^\circ)\ -\ \cos(\gamma+60^\circ)\ \right]\\
=\ &\tfrac{4}{3}\cdot b\cdot a\cdot\sin(\gamma)\cdot\sin(60^\circ)\\
=\ &\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot b\cdot a\cdot\sin(\gamma)
\end{aligned}
$$

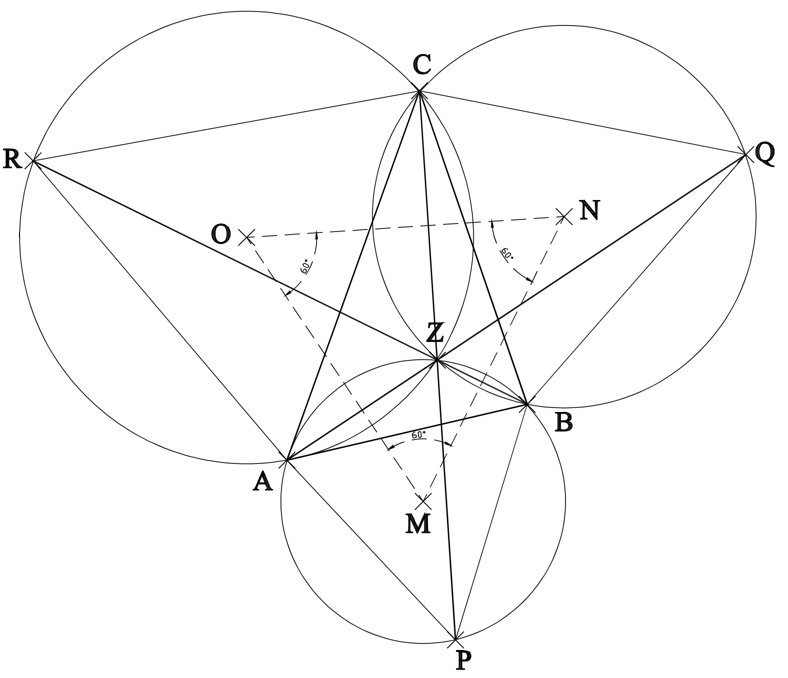
Moment einmal, der Ausdruck: $a\cdot b\cdot\sin(\gamma)$ erinnert doch ..... ?!

9) Bestätige, dass der Flächeninhalt eines gleichseitigen Dreiecks das $\frac{\sqrt{3}}{4}$- fache des Quadrats einer Seitenlänge (hier z.B. $\overline{ON}$) ist.

10) Begründe und bestätige am Beispiel, dass gilt: Der Flächeninhalt eines Dreieckes ist die Differenz der Flächeninhalte des äußeren und inneren Napoleon-Dreiecks.

<u>Nachtrag:</u>

Verbindet man die Punkte P, Q und R der nach außen angefügten gleichseitigen Dreiecke jeweils mit den gegenüber liegenden Dreieckspunkten des Ausgangsdreiecks, d.h. man zeichnet die Strecken PC, QA und RB, so verlaufen diese 3 Strecken auch durch den Punkt Z.



Z wird auch oft, dieser Eigenschaft wegen, mit F bezeichnet und heißt dann 1. Fermat-Punkt oder Torricelli-Punkt. Betrachtet man nun für einen beliebigen Punkt S innerhalb des Dreiecks ΔABC die Abstandssumme zu den Eckpunkten, also $\overline{SA}+\overline{SB}+\overline{SC}$, so hat Evangelista Torricelli als erster bewiesen, dass für diesen Punkt F die Abstandssumme minimal ist (unter der Voraussetzung, dass alle Winkel des Dreiecks ΔABC kleiner als 120° sind).

Eine ganz wesentliche Eigenschaft von Z ist hier, dass gilt: $\overline{\sphericalangle AZB} = \overline{\sphericalangle BZC} = \overline{\sphericalangle CZA} = 120^\circ$.

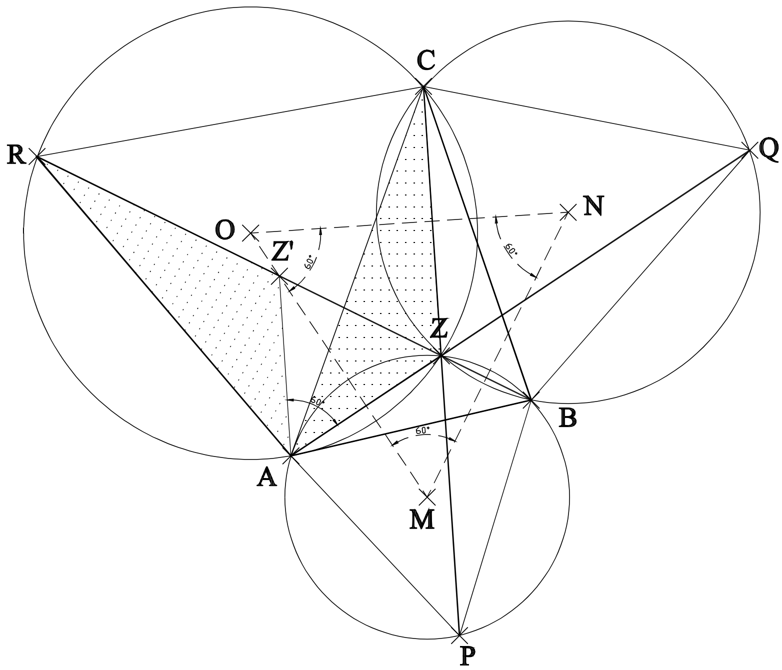
Stellt man sich nämlich das Dreieck ΔAZC gedreht vor um das Zentrum A mit einem Drehwinkel δ der Größe 60° (siehe Skizze auf der nächsten Seite), so gilt: $C' = R$, $A' = A$ und $Z' \in RB$ (Begründung?).

Die Abstandsumme $\overline{ZA}+\overline{ZB}+\overline{ZC}$ entspricht damit $\overline{ZZ'}+\overline{ZB}+\overline{RZ'}$ (Begründung?) und dies ist sicher $\overline{RB}$.
Weil die kürzeste Verbindung zwischen R und B die Strecke ist, ist $\overline{ZA}+\overline{ZB}+\overline{ZC}$ minimal.

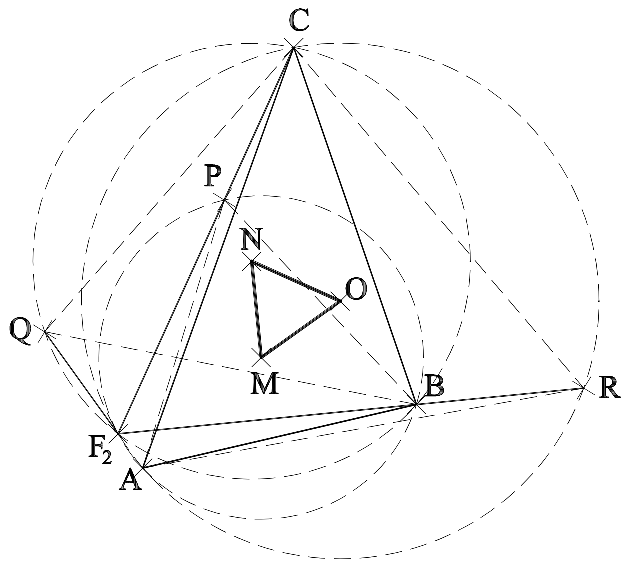
Spielerei mit Dreiecksspiegelungen

und die Folgerungen - oder - was hat Napoleon mit Dreiecken zu tun?

Dreht man ein Dreieck ΔASC mit S ≠ Z wie zuvor, dann liegen die Strecken SS′, SB und RS′ nicht auf einer Geraden.



Den 2. Fermat-Punkt erhält man, wenn man die gleichseitigen Dreiecke wieder nach innen anfügt und die 3 Geraden g(P,C), g(Q,A) und g(R,B) konstruiert, die wiederum durch einen Punkt verlaufen.



Pierre de **Fermat**
✳ 17.08. 1601 in Beaumont-de-Lomagne
† 12. 01. 1665 in Castres, (Frankreich)

Evangelista **Torricelli**
✳ 15. 10. 1608 in Faenza
† 25. 10. 1647 in Florenz, (Italien)

Quellen: Coxeter/Greitzer: Zeitlose Geometrie; Verlag: Klett 1983
http://did.mat.uni-bayreuth.de/geonet/beispiele/minimum/index.html