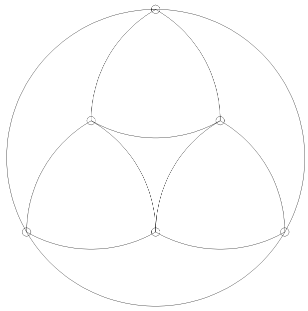
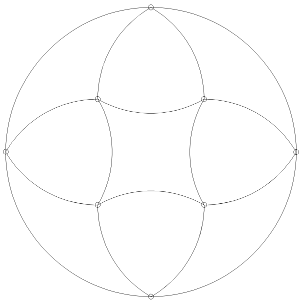
Bögen und Kreise II

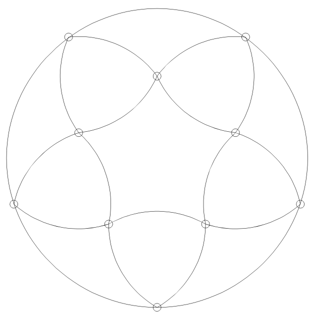
wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

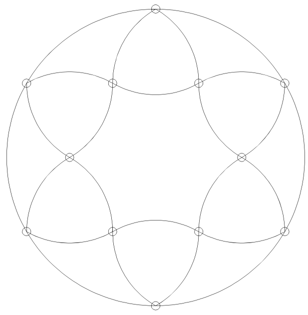


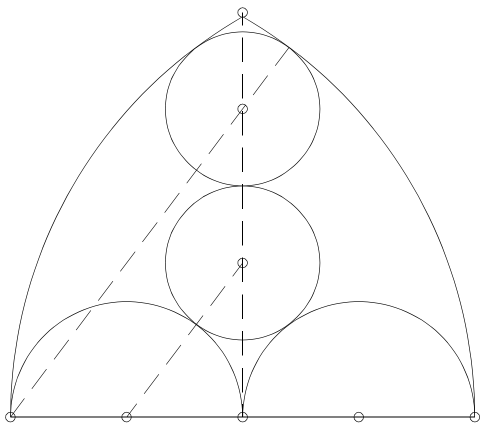
1. Die folgenden, kreisförmigen Fenster findet man in der Zisterzienserabtei Hauterive in Fribourg (Schweiz).

   Analysiere die Konstruktion und fertige eigene Fenster auf der Grundlage des Konstruktionsprinzips an.



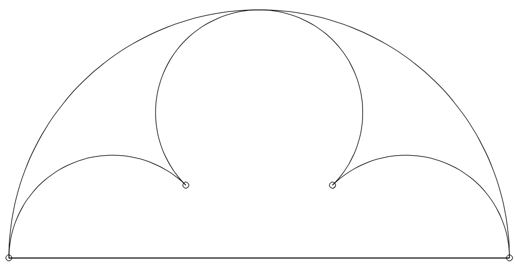






2. Ergänze die nebenstehende Skizze durch geeignete Bezeichnungen.
   Berechne für die Berührkreise den Abstand der Mittelpunkte über der Kämpferlinie sowie deren Radiusgröße.

   Überprüfe deine Berechnungen durch eine entsprechende Konstruktion der Berührkreise im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.

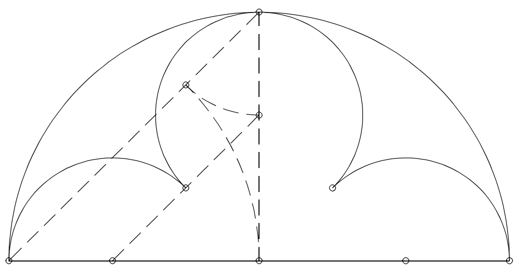


3. Der Passbogen erscheint zunächst als eine einfache Figur, doch bei näherem Hinsehen ist der Radius der einbeschriebenen Kreise und die Länge der Bögen vielleicht doch nicht so leicht zu sehen.

   Konstruiere einen Passbogen unter Beachtung der eingezeichneten Hilfslinien der 2. Figur.

   Bestimme den rechnerischen Zusammenhang der Radiusgröße des äußeren Halbkreises zur Radiusgröße der einbeschriebenen Kreisbögen.
   Beweise: Der Passbogen ist ein halbierter Vierpass.

Erinnerung: $\mathbf{r} = \dfrac{\sin(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} \cdot \mathbf{R}$ mit $\alpha = \dfrac{180°}{n}$



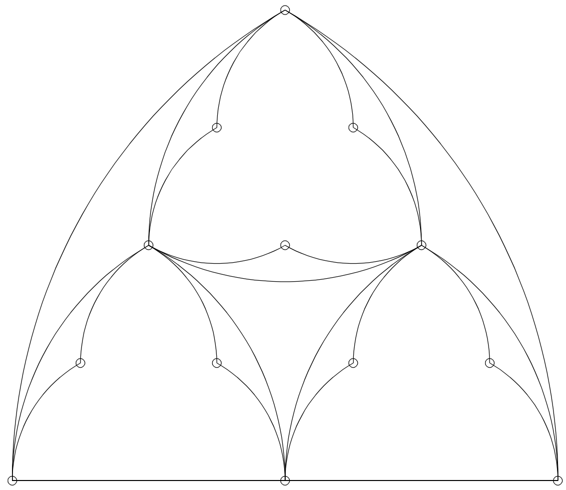
Bögen und Kreise II

wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

4. In das nebenstehend skizzierte Spitzbogenfenster ist oben ein Dreiblatt eingefügt, dessen Konstruktionsprinzip gar nicht so schwer zu entdecken ist.

   Versuche ein Dreiblatt separat im Heft zu konstruieren.

   Ergänze die nebenstehende Skizze durch geeignete Bezeichnungen und führe eine entsprechende Konstruktion dieses Fensters im Heft durch. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.

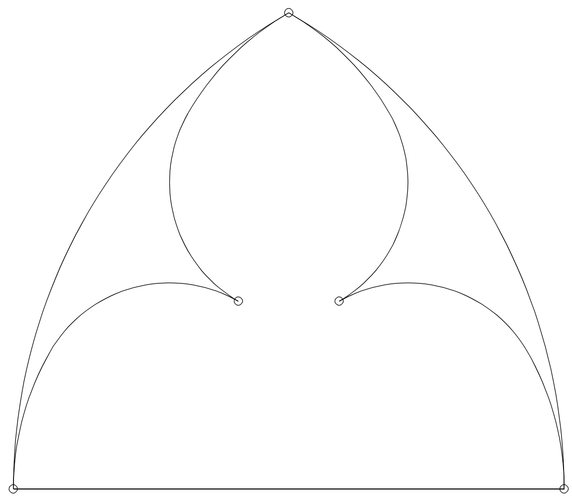


---

5. Die nebenstehende Figur zeigt einen Nonnenkopf, ein bei gotischen Kirchenfenstern häufig vorkommendes Muster.

   Der Nonnenkopf ist aus mehreren Kreisbögen zusammengesetzt, wobei die jeweiligen Enden der Bögen sich tangential anschließen müssen, damit keine ungewollten Ecken entstehen.

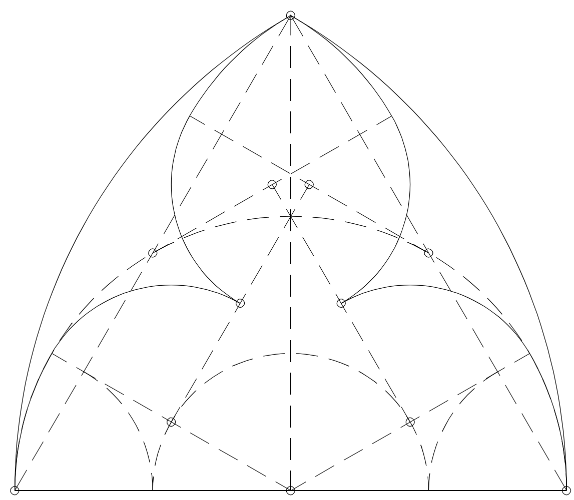
   Analysiere die nebenstehende Figur und versuche Mittelpunkte von Kreisbögen, sowie die zugehörigen Radien zu entdecken.



Mit eingezeichneten Hilfslinien erkennt man die Konstruktion sicher leichter.

Benenne geeignet die Mittelpunkte von Kreisbögen und begründe, warum keine ungewollten Knickstellen entstehen.

Konstruiere einen Nonnenkopf im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.

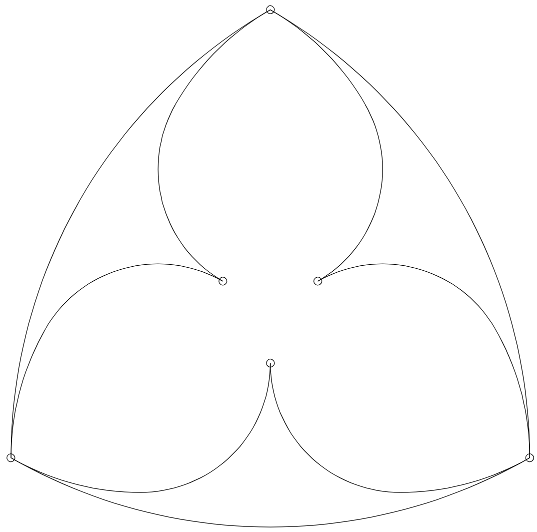


Bögen und Kreise II

wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

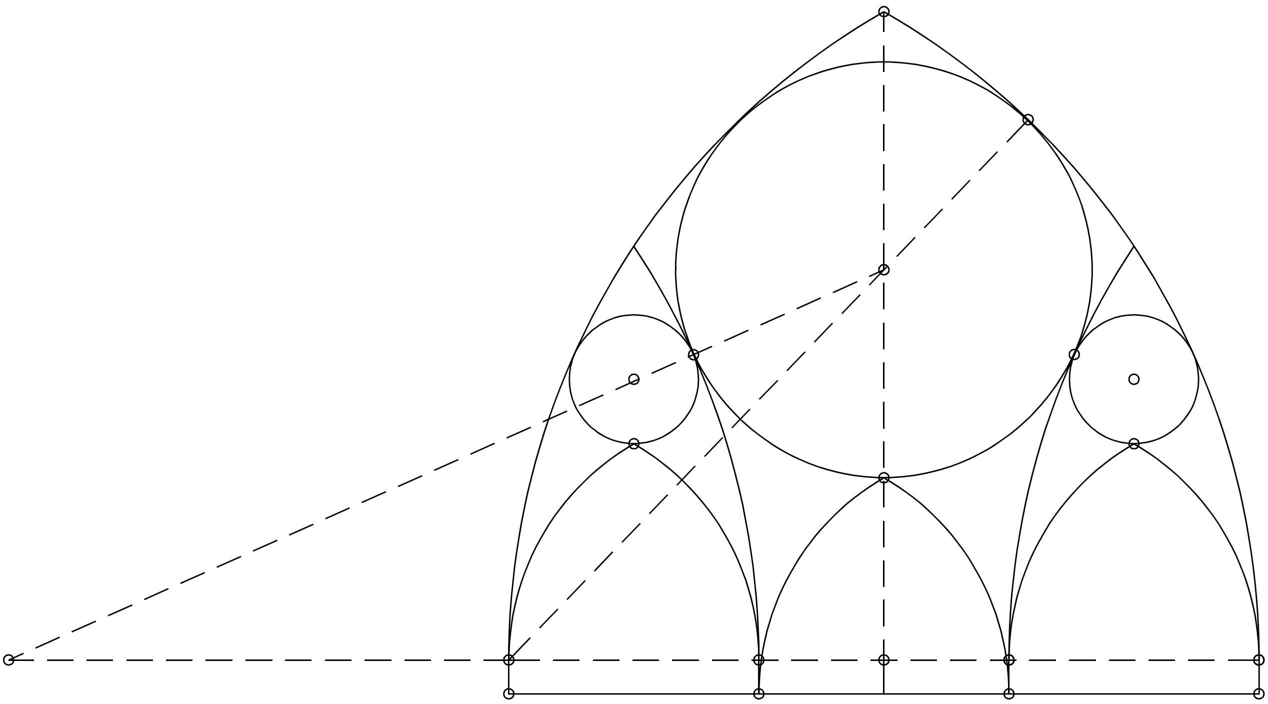
6. Das gotische Dreiblatt besteht aus 3 oberen Teilen eines Nonnenkopfes, die, jeweils um 120° gedreht, aneinander gefügt wurden. Die äußere Begrenzung ist ein Reuleauxsches Dreieck, wie man den Roller (auch Gleichdick genannt) heutzutage bezeichnet.

   Nutze bei der Konstruktion dieses Dreiblatts geeignet die Drehsymmetrie aus.



7. Das folgende Fenster findet man im Kloster Haina. Ergänze die untenstehende Skizze durch geeignete Bezeichnungen und analysiere die Konstruktion mit den eingezeichneten Hilfslinien.

   Bestimme für die Bögen und Berührkreise die Lage der Mittelpunkte und berechne deren Radiusgröße. Überprüfe deine Berechnungen durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.



Bögen und Kreise II

wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

8. Das nebenstehende Fenster findet man in Frankfurt a.M. am Dom. Die grundsätzliche Konstruktion ist ähnlich der des vorherigen Fensters aus dem Kloster Haina.

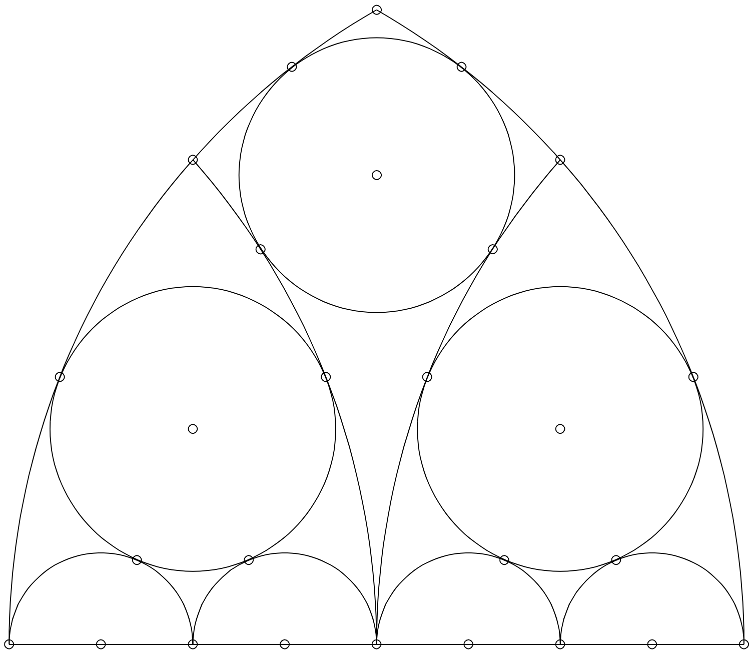
   Bestätige, dass für den Radius $\mathbf{r_o}$ des oberen Berührkreises gilt:

   $$\mathbf{r_o} = \frac{3}{16} \cdot \mathbf{a}$$

   und für den Radius $\mathbf{r_u}$ der unteren beiden Berührkreise:

   $$\mathbf{r_u} = \frac{7}{36} \cdot \mathbf{a} \; .$$

   Überprüfe das Ergebnis durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.

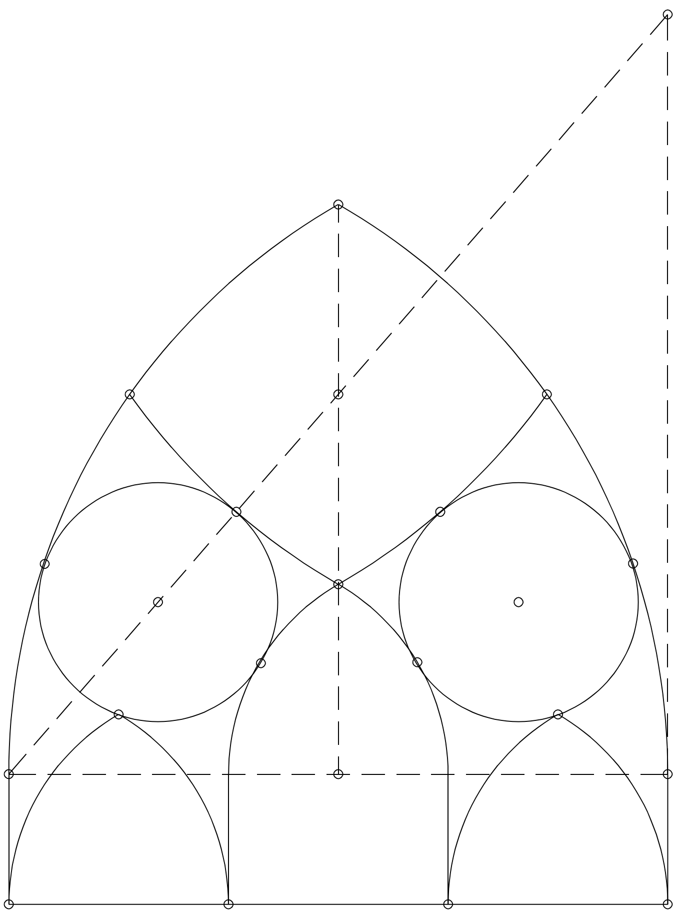


9. Das nebenstehende Fenster findet man in Frankfurt a.M. am Dom (und Deutschordenskirche).

   Ergänze die nebenstehende Skizze durch geeignete Bezeichnungen und analysiere die Konstruktion mit den eingezeichneten Hilfslinien.

   Bestimme für Berührkreise und Bögen die Lage der Mittelpunkte und berechne deren Radiusgröße (was nicht so ganz einfach ist).

   Überprüfe deine Berechnungen durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.



Bögen und Kreise II

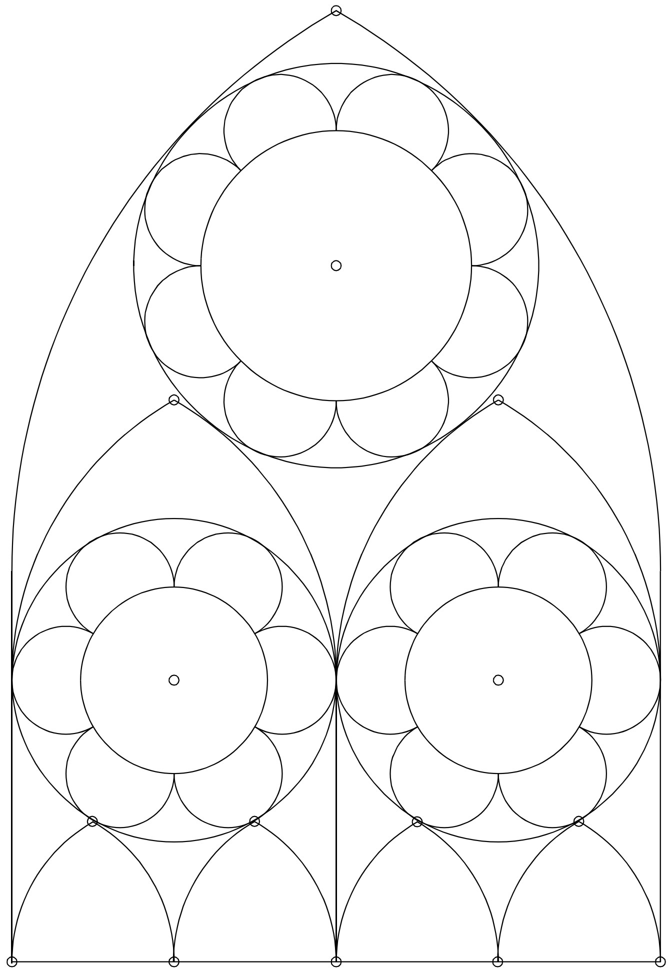
wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

10. Auch das folgende Fenster findet man im Kloster Haina. Dieses Fenster stellt eine Erweiterung einer Konstruktion in der Kathedrale von Reims dar.

    Ergänze die nebenstehende Skizze durch geeignete Bezeichnungen und Hilfslinien und analysiere die Konstruktion.

    Bestimme für Bögen und Berührkreise die Lage der Mittelpunkte und berechne deren Radiusgröße.

    Überprüfe deine Berechnungen durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.



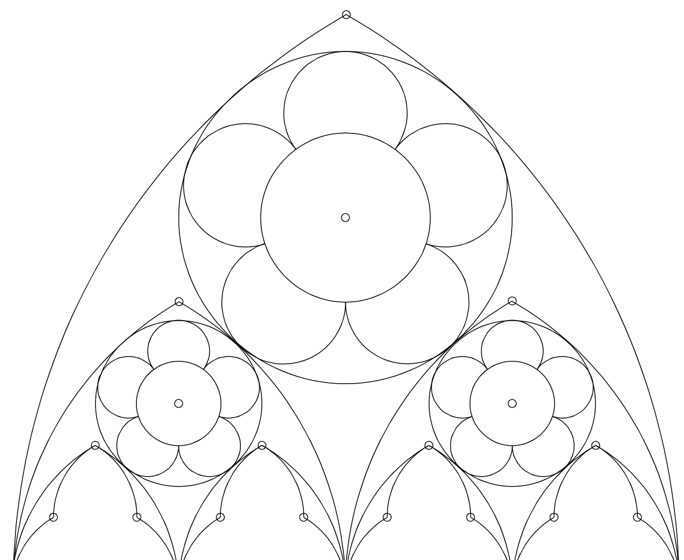
---

11. Das nebenstehend skizzierte Fenster findet man in den Chorkapellen des Kölner Domes.

    Ergänze die nebenstehende Skizze durch geeignete Bezeichnungen und Hilfslinien und analysiere die Konstruktion.

    Bestimme für Bögen und Berührkreise die Lage der Mittelpunkte und berechne deren Radiusgröße.

    Überprüfe deine Berechnungen durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.



Bögen und Kreise II

wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

12. Das nebenstehend skizzierte Fenster findet man am Portal der Matthiaskirche in Budapest.

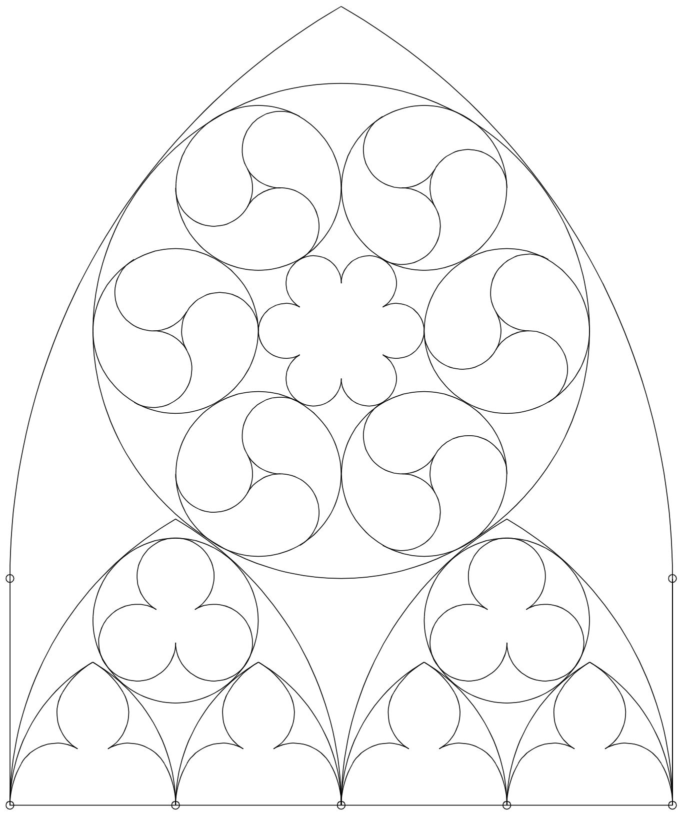
    Ergänze die nebenstehende Skizze durch geeignete Bezeichnungen und Hilfslinien und analysiere die Konstruktion.

    Bestimme für Bögen und Berührkreise die Lage der Mittelpunkte und berechne deren Radiusgröße.

    Überprüfe deine Berechnungen durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.

    Zum Vergleich: Das dem oberen Spitzbogen angefügte Rechteck hat die Höhe:

$$\mathbf{h} = \frac{1}{8} \cdot \left(\sqrt{33} - 3 \right) \cdot \mathbf{a}.$$

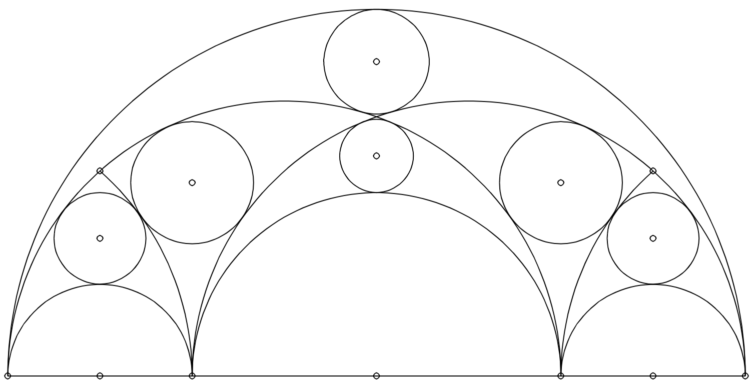


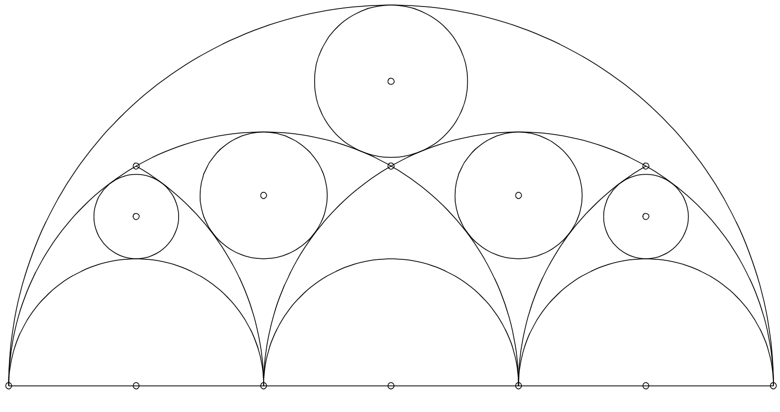
13. Die nebenstehend skizzierten Fenster findet man in der Kirche Orsanmichele in Florenz.

    Mittelpunkte und Radien der Berührkreise sind nicht allzu schwer zu ermitteln. Die Radien sind jeweils ein natürlicher Anteil der halben Kämpferlinie.

    Ergänze die Skizzen durch geeignete Bezeichnungen und analysiere die Konstruktionen.

    Bestimme für die Bögen und Berührkreise die Lage der Mittelpunkte und berechne deren Radiusgröße. Überprüfe deine Berechnungen durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.





14. Das nebenstehende Fenster findet man in einem Erker des Frankfurter Doms.

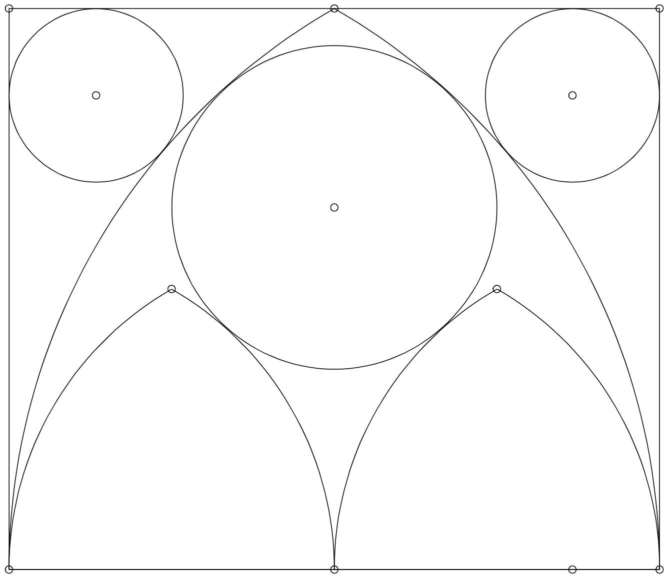
    Es ist leicht zu sehen, dass für den Radius $\mathbf{r_g}$ des großen Berührkreises gilt:

    $$\mathbf{r_g} = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{a}$$

    Etwas schwieriger ist der Radius $\mathbf{r_k}$ des kleinen Berührkreises zu bestimmen. - Bestätige, dass für diesen Berührkreis gilt:

    $$\mathbf{r_k} = \left(2 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{4 + 2 \cdot \sqrt{3}} \right) \cdot \mathbf{a}$$

    Beachte: Das umgebende Viereck ist kein Quadrat. - Überprüfe das Ergebnis durch eine entsprechende Konstruktion im Heft. Achte auf eine geeignete Größe der Gesamtfigur.



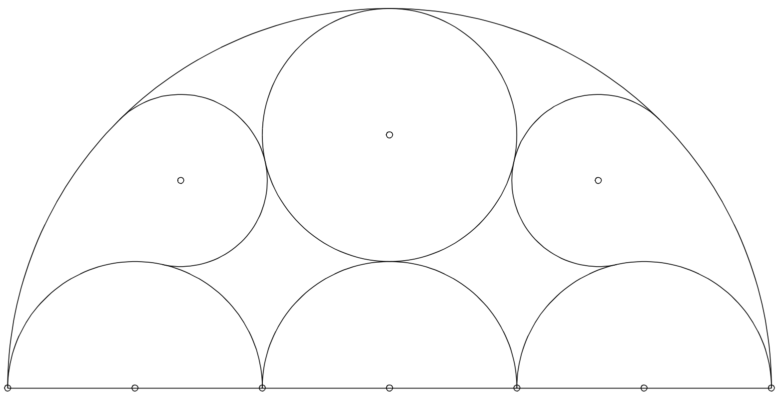
---

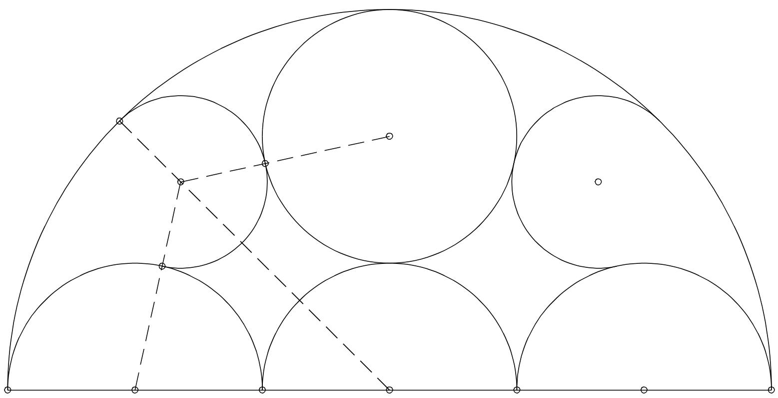
15. Das nebenstehend skizzierte Kirchenfenster findet man in Frankfurt am Main an der Leonhardkirche und der Katharinenkirche.

    Mit den eingezeichneten Hilfslinien erkennt man, dass es sich z.T. um ein Berührkreisproblem von 3 Kreisen handelt.

    Analysiere die Gesamtfigur und bestimme Lage und Radius **r** des Berührkreisbogens in Abhängigkeit von Radius **R** des äußeren Halbkreises (**R** ist halb so groß wie die Kämpferlinie).

    Überprüfe deine Rechnung durch exemplarische Konstruktion der Figur im Heft. Achte auf eine vernünftige Größe der Gesamtfigur.





Bögen und Kreise II

wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

Lösungsskizze zu 9.:

Bezeichnungsvereinbarungen: $\mathbf{a} := \overline{AB}$; $\mathbf{x} := \overline{FD}$; $\mathbf{y} := \overline{AE}$; $\mathbf{h} := \overline{FZ}$

Es gilt: $\overline{MD} = \frac{a}{\sqrt{3}}$; $\overline{BC} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot a$

$$h^2 = \left(\frac{a}{3} + r\right)^2 - \left(x + \frac{a}{6}\right)^2 = (a - r)^2 - \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad x = a - 4 \cdot r$$

$$\overline{AC} = a + 2 \cdot r + y = \sqrt{a^2 + \frac{4}{3} \cdot a^2}$$

$$\Rightarrow \quad y + 2 \cdot r = a \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{3}} - 1\right)$$

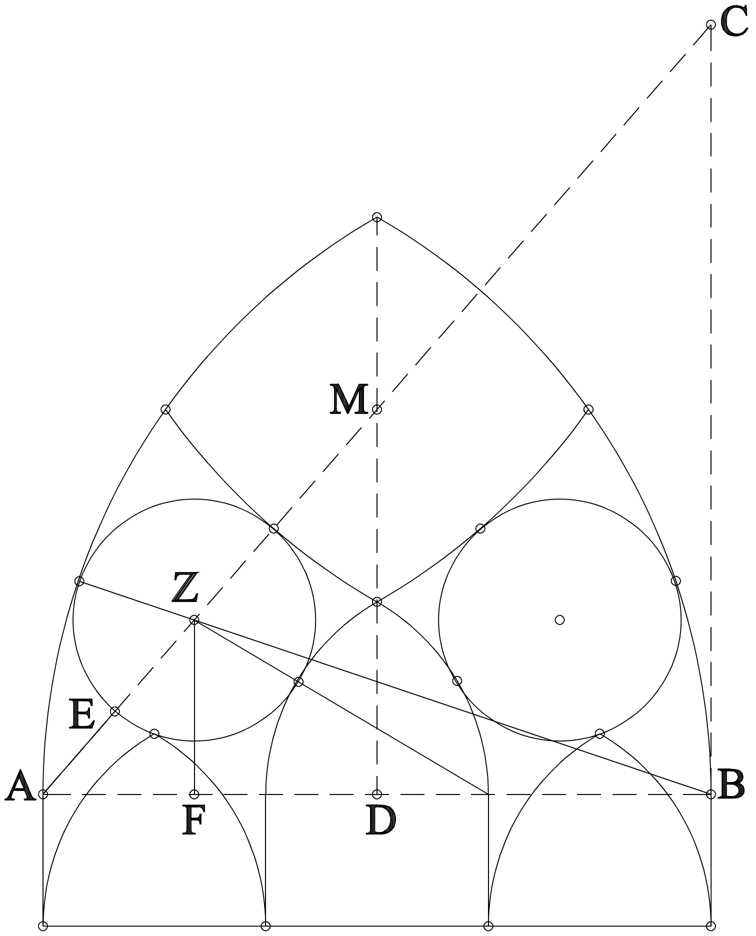
$$\frac{h}{\frac{a}{2} - x} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot a}{a}$$

$$\Rightarrow \quad h = \frac{a - 2 \cdot x}{\sqrt{3}}$$

$$(y + r)^2 = \left(\frac{a - 2 \cdot x}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2$$

$$\left(a \cdot \left(\sqrt{\frac{7}{3}} - 1\right) - r\right)^2 = \frac{7}{3} \cdot \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{7}{3} \cdot \left(4 \cdot r - \frac{a}{2}\right)^2$$

$$\boxed{r = \frac{\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} - 1}{4 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} + 1} \cdot a}$$



Lösungsskizze zu 7.:

Die Höhe des kleinen Spitzbogens ist $\frac{a}{6} \cdot \sqrt{3}$.

Damit ergibt sich für den Radius des kleinen Berührkreises aus den Berührbedingungen:

$$\left(\frac{a}{6} \cdot \sqrt{3} + r\right)^2 + \left(\frac{5}{6} \cdot a\right)^2 = (a - r)^2$$

Ergebnis:

$$r = \frac{2}{99} \cdot \left(6 - \sqrt{3}\right) \cdot a$$

Lösungsskizze zu 15.:

Bezeichnungsvereinbarungen: $\mathbf{x} := \overline{CL}\,;\ \mathbf{h} := \overline{LZ}$

Es gilt:
$$\left\{\begin{array}{lcccl} & h^2 & + & \left(\frac{2}{3}\cdot R - x\right)^2 & = (R-r)^2 \\ \wedge & h^2 & + & x^2 & = \left(\frac{1}{3}\cdot R + r\right)^2 \\ \wedge & \left(\frac{2}{3}\cdot R - h\right)^2 & + & \left(\frac{2}{3}\cdot R - x\right)^2 & = \left(\frac{1}{3}\cdot R + r\right)^2 \end{array}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} & h^2 + x^2 - r^2 = \frac{5}{9}\cdot R^2 - 2\cdot R\cdot r + \frac{4}{3}\cdot R\cdot x \\ \wedge & h^2 + x^2 - r^2 = \frac{1}{9}\cdot R^2 + \frac{2}{3}\cdot R\cdot r \\ \wedge & h^2 + x^2 - r^2 = -\frac{7}{9}\cdot r^2 + \frac{2}{3}\cdot R\cdot r + \frac{4}{3}\cdot R\cdot h + \frac{4}{3}\cdot R\cdot x \end{array}\right\}$$

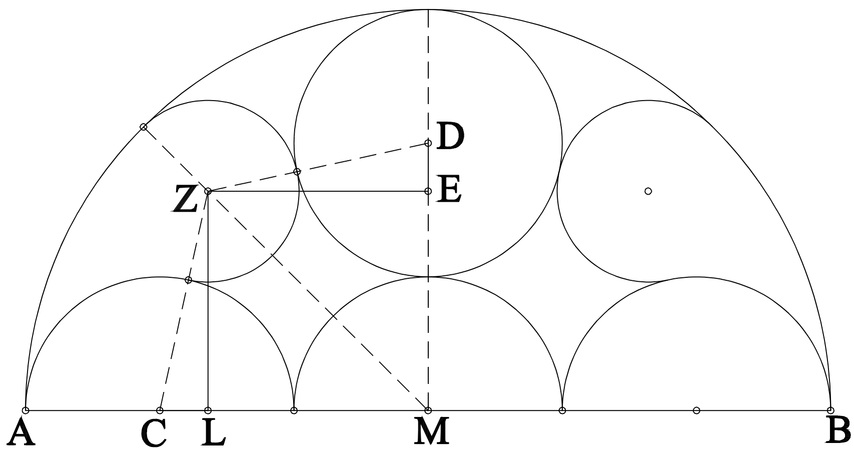
Aus der 2. und 3. Gleichung ergibt sich: $\boxed{h + x = \frac{2}{3}\cdot R}$

Aus der 1. und 2. Gleichung ergibt sich: $\boxed{x = 2\cdot r - \frac{1}{3}\cdot R}$

und damit gilt: $\boxed{h = R - 2\cdot r}$

Die letzten beiden Beziehungen eingesetzt in die 2. Gleichung führt über die Lösung einer quadratischen Gleichung zu den Ergebnissen:[1]

$$\boxed{\mathbf{r} = \frac{1}{7}\cdot\mathbf{R}\cdot\left(3 - \sqrt{2}\right)\,;\quad \mathbf{h} = \frac{1}{7}\cdot\mathbf{R}\cdot\left(1 + 2\cdot\sqrt{2}\right)\,;\quad \mathbf{x} = \frac{1}{21}\cdot\mathbf{R}\cdot\left(11 - 6\cdot\sqrt{2}\right)}$$

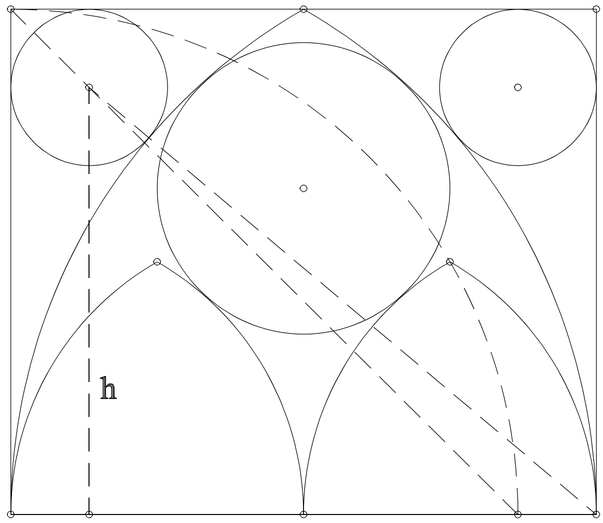


[1] Beachte, dass die 2. Lösung der quadratischen Gleichung einen Kreis beschreibt, der die Kreise mit den Mittelpunkten C, M und D umfasst.

Bögen und Kreise II

wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

Lösungsskizze zu 14.:



Es gilt:

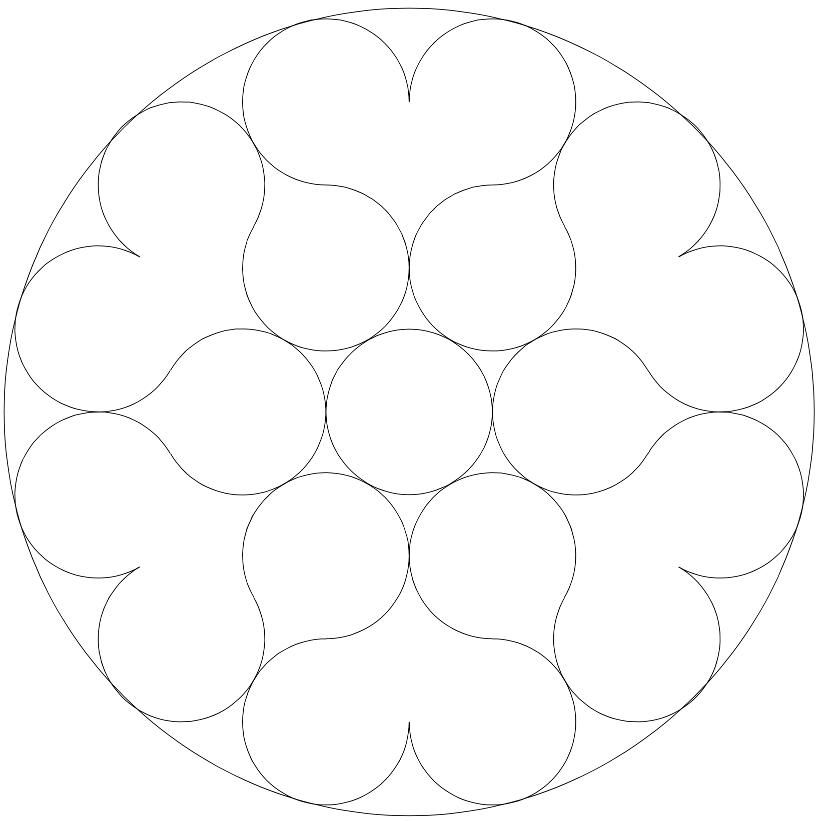
$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{6} - r\cdot\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\cdot\sqrt{3} - r\right)^2$$

$$\wedge \quad h^2 = (a + r)^2 - (a - r)^2$$

Durch Gleichsetzen der rechten Terme erhält man nach Umformungen die quadratische Gleichung

$$r^2 - \left(4\cdot a + \sqrt{3}\cdot a\right)\cdot r + \frac{3}{4}\cdot a^2 = 0$$

deren eine Lösung für **r** (negatives Vorzeichen vor der Wurzel) die angegebene und eingezeichnete ist. Bei der zweiten Lösung würde der Kreis den Spitzbogen innen berühren.



Bögen und Kreise II

wo liegen denn die Mittelpunkte? - wie groß ist der Radius?

Die Konstruktion von 12. mit Hilfslinien: