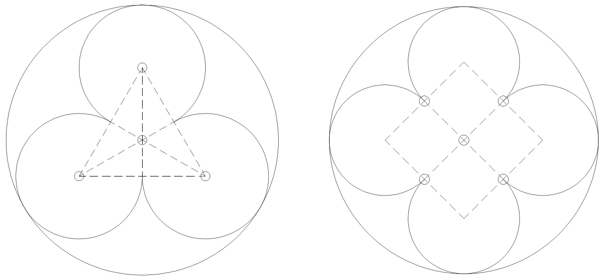
Das Berührkreisproblem

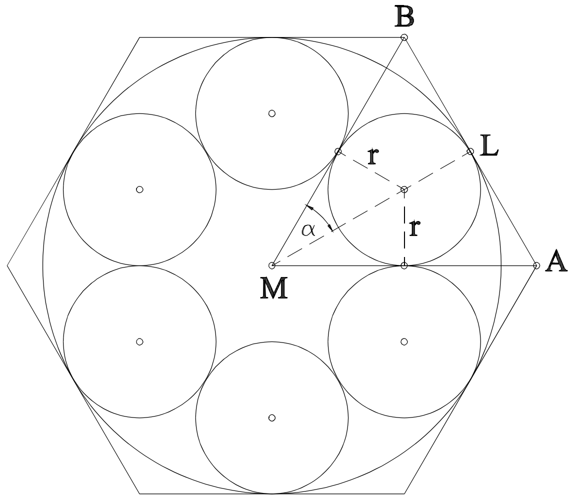
oder: ... von innen nach außen - von außen nach innen - wie viele Ecken dürfen es denn sein ?

Bei gotischen Kirchenfenstern taucht bekanntlich das Problem auf, bei vorgegebener äußerer Randkurve die Mittelpunkte und die Radien innerer Berührkreise, bzw. bei vorgegebener innerer Figur die Mittelpunkte und Radien äußerer Berührkurven zu finden.



Wir wollen versuchen, für den Fall von Kreisen diesen Sachverhalt allgemein zu untersuchen.[1]

Zeichne in dein Heft ein regelmäßiges Sechseck, das uns zunächst als Beispiel eines allgemeinen n-Eckes dienen soll, mit dem dazu gehörenden Innenkreis.



Kennzeichne ein gleichschenkliges Dreieck des regelmäßigen n-Eckes (hier **ΔMAB**) und konstruiere die Winkelhalbierende des zugehörigen Zentriwinkels. Benenne den Schnittpunkt dieser Winkelhalbierende mit der Seite **AB** des n-Eckes mit **L** und den halben Zentriwinkel mit **α**.

Wie lautet nun der Zusammenhang zwischen dem großen Kreis und den inneren Berührkreisen? - Wie findet man die Mittelpunkte und den Radius **r**?

Bezeichnungsvereinbarungen: $\overline{\mathbf{ML}} = \mathbf{R}$; $\overline{\mathbf{AB}} = \mathbf{a}$; $\overline{\mathbf{MA}} = \mathbf{d}$

1. <u>Begründe:</u>

$$\mathbf{A}_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot R = \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot d + a) \cdot r$$

$$\mathbf{a} = 2 \cdot R \cdot \tan(\alpha) \quad ; \quad \mathbf{d} = \frac{R}{\cos(\alpha)}$$

$$\mathbf{R} = \frac{2 \cdot \dfrac{R}{\cos(\alpha)} + 2 \cdot R \cdot \tan(\alpha)}{2 \cdot R \cdot \tan(\alpha)} \cdot \mathbf{r} = \left(1 + \frac{1}{\sin(\alpha)} \right) \cdot \mathbf{r}$$

$$\mathbf{r} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} \cdot \mathbf{R} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{180^\circ}{n}$$

---

2. Konstruiere nun in deinem Innenkreis des regelmäßigen Sechseckes (Radius **R**) 6 innere Berührkreise (Radius **r**). Begründe, dass die Mittelpunkte der inneren Berührkreise ihrerseits Eckpunkte eine regelmäßigen Sechseckes sind. Wie groß ist die Seitenkante dieses inneren Sechseckes?

---

[1] <u>Quelle:</u> Inge Hachtel: Mathematik an Kirchenfenstern, MNU, Jahrgang 49, Heft 8, 1996

Das Berührkreisproblem

oder: ... von innen nach außen - von außen nach innen - wie viele Ecken dürfen es denn sein ?

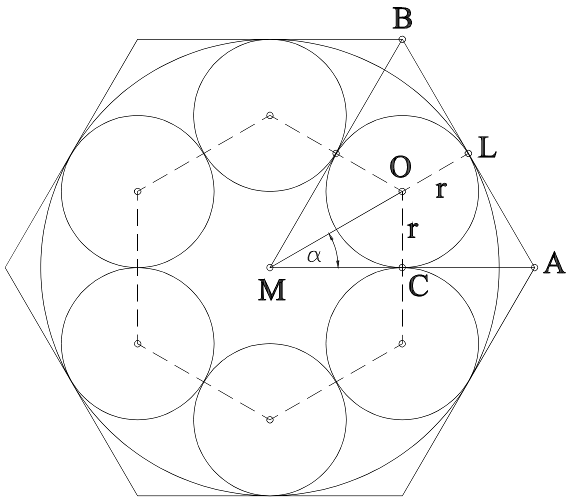
3. Ausgehend von dem inneren n-Eck, gebildet aus den Mittelpunkten der inneren Berührkreise, gilt:

$$\mathbf{r} = (\mathbf{R} - \mathbf{r}) \cdot \sin(\alpha)$$

$$\mathbf{r} \cdot (1 + \sin(\alpha)) = \mathbf{R} \cdot \sin(\alpha)$$

$$\mathbf{r} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \sin(\alpha)} \cdot \mathbf{R}$$

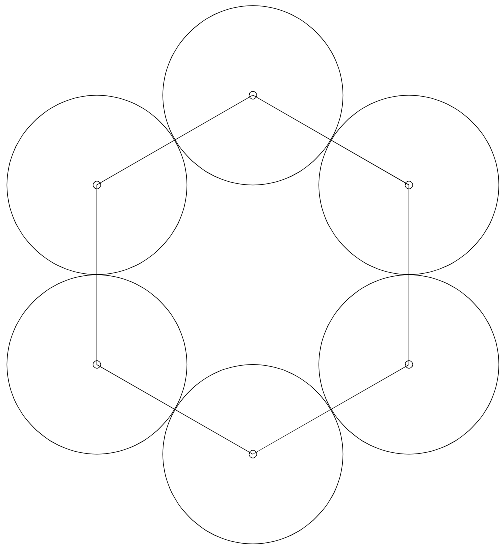
Damit ergibt sich die Beziehung aus Aufgabe 1 noch einfacher.



4. Konstruiere ein regelmäßiges Sechseck und zeichne in jedem Eckpunkt einen Kreis, dessen Radius halb so groß wie die Seitenkante des Sechseckes ist.

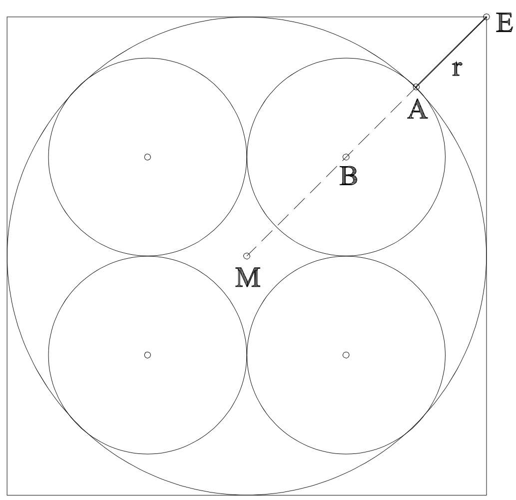
Konstruiere einen äußeren Berührkreis dieser 6 Kreise!

Wie groß ist der Radius **R** dieses äußeren Berührkreises?

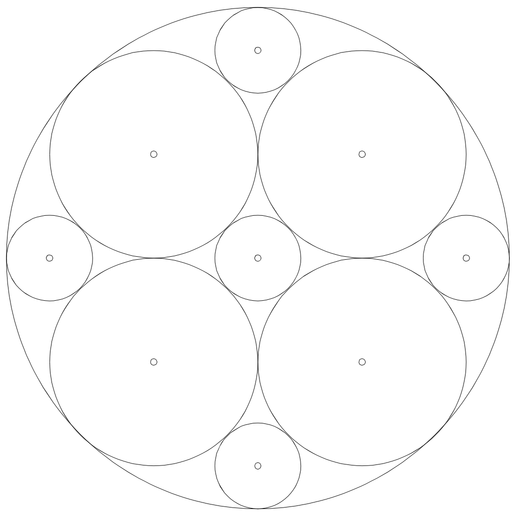


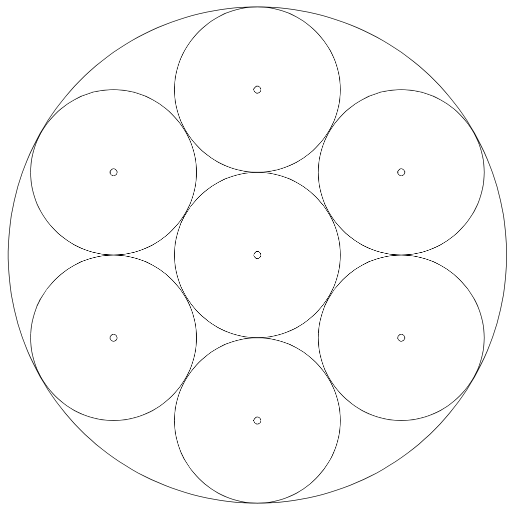
5. Zeichne einen großen Kreis mit Mittelpunkt **M** und konstruiere um diesen Kreis ein Berührquadrat. Die halbe Diagonale **ME** des Quadrates schneidet den Kreis im Punkt **A**.

<u>Beweise:</u>
Die Länge der Strecke **AE** ist die Größe des Radius von vier inneren Berührkreisen.



6. Fülle die Freiräume zwischen dem Außenkreis und den vier inneren Berührkreisen durch 5 weitere kleine Berührkreise.
   Versuche auch für den Fall von 6 Berührkreisen Radius und Lage von kleinen inneren Berührkreisen zu bestimmen, welche die Freiräume zwischen Außenkreis und Berührkreisen füllen.





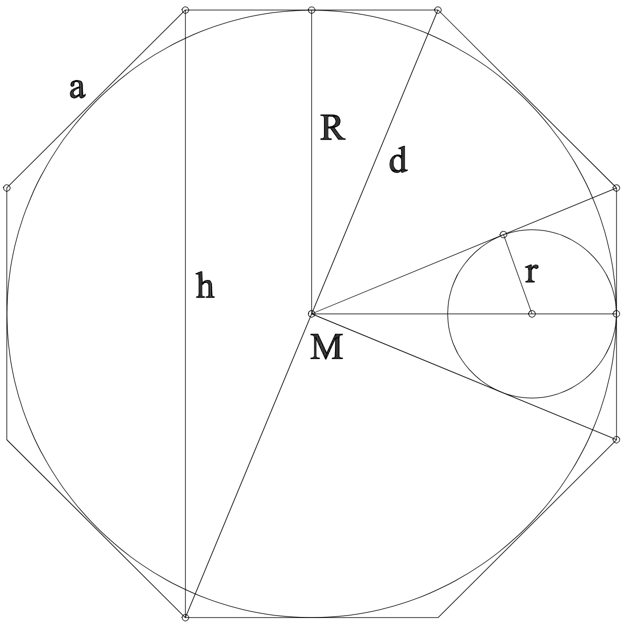
---

7. Zeichne ein regelmäßiges Achteck mit beliebiger Seitenkante **a**.

   a) Bestimme in Abhängigkeit von **a** den Radius **R** des Innenkreises ohne Verwendung trigonometrischer Funktionen.

   b) Bestimme danach in Abhängigkeit von **R** den Radius **r** des Berührkreises ohne Verwendung trigonometrischer Funktionen.[2]

   c) Konstruiere nun in das gezeichnete regelmäßige Achteck den Innenkreis und die 8 inneren Berührkreise.



---

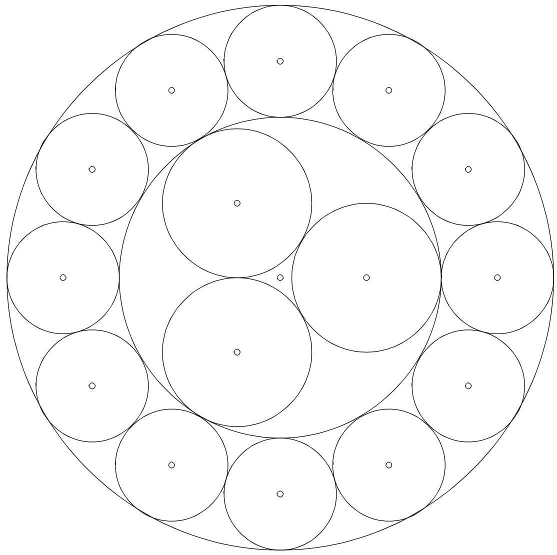
[2] Tipp: Verwende auch die Flächeninhaltsbeziehung im Teildreieck: $a \cdot R = (2 \cdot d + a) \cdot r$

8. (Kugellager) Zeichne einen Kreis mit Radius $\mathbf{R}$ = 12 cm. Berechne den Radius $\mathbf{r}$ von 12 inneren Berührkreisen sowie den Radius $\mathbf{r_i}$ eines Innenkreises, der wiederum die 12 Berührkreise innen begrenzt.

   Konstruiere die Figur.

   Fülle nun den inneren Kreis wiederum mit 3 inneren Berührkreisen. Berechne dazu den Radius $\mathbf{r_3}$ dieser 3 Kreise.

   Ergänze die Figur mit den weiteren 3 Kreisen.



9. Gegeben sei ein Kreis mit Radius $\mathbf{R}$. Berechne für die Fälle von n = 3,4,5,6,8,10,12 , welcher Anteil der Kreisfläche von n Berührkreisen überdeckt wird.

   Gibt es eine Zahl n, sodass die n Berührkreise gerade die Hälfte der Gesamtfläche überdecken?