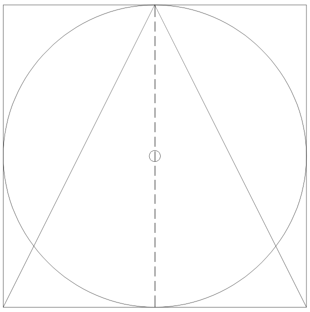
Das Kugelvolumen

oder, ... was ist das Geheimnis des Grabsteins des Archimedes



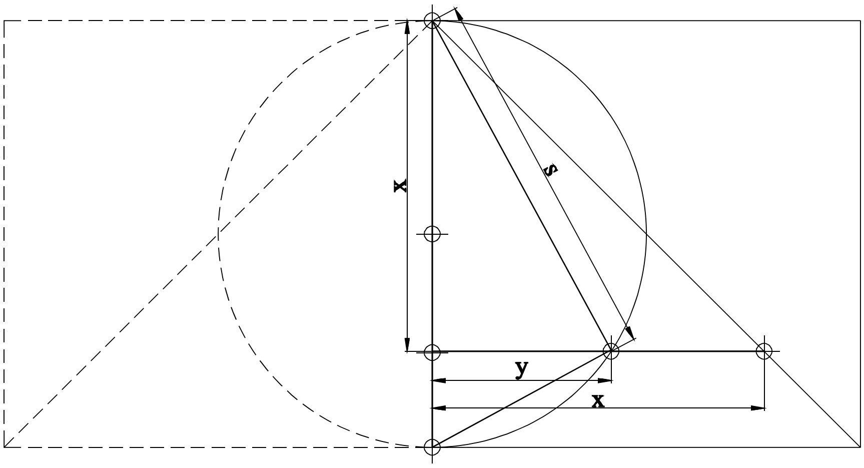
Der Grabstein des **Archimedes** von Syrakus, was hat er zu bedeuten? - Auf welche besondere Entdeckung dieses großen griechischen Mathematikers / Naturwissenschaftlers / Ingenieurs weist er hin?
Die gestrichelte Linie ist sicher für alle drei ebenen Figuren: - gleichschenkliges Dreieck, Kreis, Quadrat - Symmetrieachse, und wenn man diese Symmetrieachse als Rotationsachse dieser ebenen Figur auffasst, so entstehen drei geometrische Körper:

Zylinder - Kugel - Kegel

---

1) Versuche zunächst durch Literaturrecherche (Lexikon, Internet[1], etc.) mehr über den berühmten Mathematiker, Naturwissenschaftler, Ingenieur, ... **Archimedes** von Syrakus zu erfahren.

Archimedes Überlegungen gingen von der nebenstehenden Figur aus.



In das rechte Quadrat mit der Seitenlänge 2·r sind eine Diagonale und ein Halbkreis eingezeichnet. Die linke Seite des rechten Quadrats stellt man sich als Rotationsachse vor (hier die Mittellinie der Gesamtfigur).

Denkt man sich nun im Abstand x von der oberen Seite einen horizontalen Schnitt gelegt, so wird aus dem Halbkreis eine Strecke y, aus dem (rechtwinklig) gleichschenkligen Dreieck eine Strecke x ausgeschnitten.

2) <u>Begründe:</u>

$$x^2 + y^2 = s^2$$

$$2\cdot r \cdot x = s^2$$

$$x^2 + y^2 = 2\cdot r \cdot x$$

$$2\cdot\pi\cdot r\cdot x^2 + 2\cdot\pi\cdot r\cdot y^2 = (2\cdot r)^2\cdot\pi \cdot x$$

$$\left(\pi\cdot x^2 + \pi\cdot y^2\right)\cdot 2\cdot r = \left(\pi\cdot(2\cdot r)^2\right)\cdot x$$

Von der 3. zur 4. Gleichung fand gedanklich die Rotation statt, so dass man Elemente der letzten Gleichung nun als Schnittflächen von Rotationskörpern interpretieren kann: $\pi \cdot y^2$ ist die Schnittkreisfläche einer Kugel (Rotation des Halbkreises), $\pi \cdot x^2$ ist die Schnittkreisfläche eines Kegels (Rotation des Dreiecks), $\pi \cdot (2\cdot r)^2$ ist die Schnittkreisfläche eines Zylinders (Rotation des Quadrates).

---

[1] z.B. unter der Adresse: http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Archimedes.html

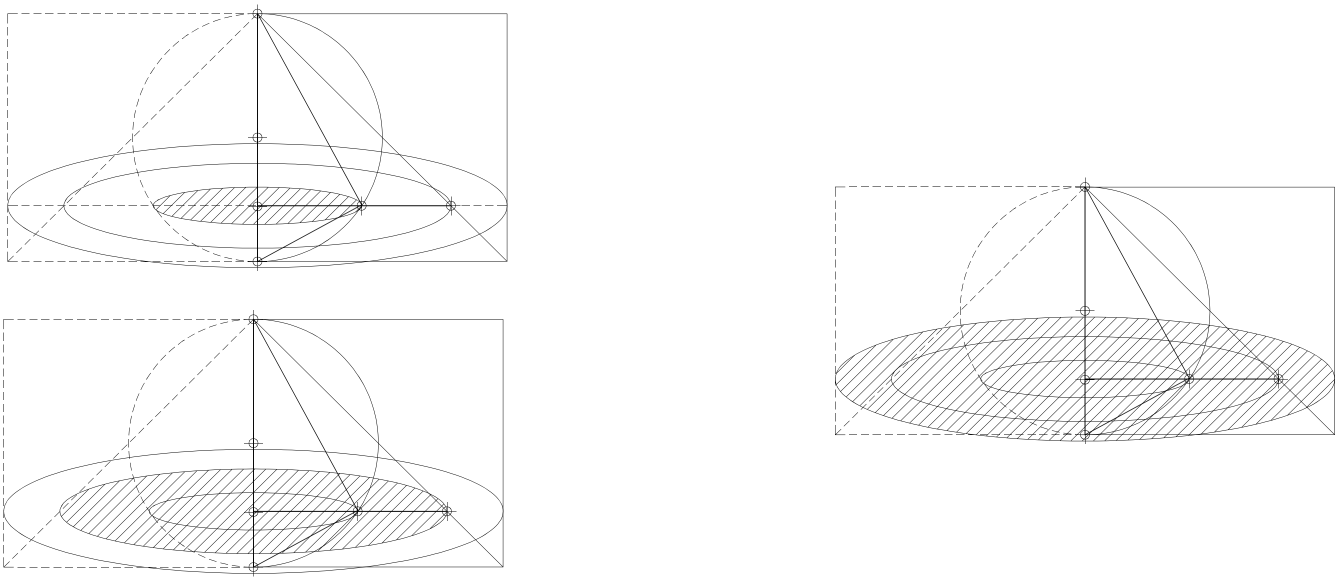
Das Kugelvolumen

oder, ... was ist das Geheimnis des Grabsteins des Archimedes

Archimedes stellte sich bei der letzten Gleichung vor, die Kreisscheiben hätten eine kleine Masse, d.h. er stellte sich ganz schmale Zylinderscheiben einer kleinen Dicke **d** vor, womit er die Gleichung:

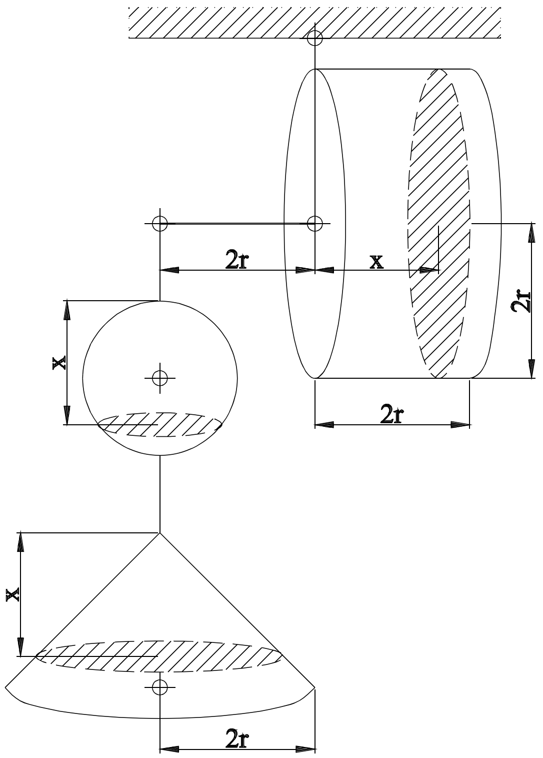
$$\left(\pi\cdot x^2\cdot \mathbf{d} + \pi\cdot y^2\cdot \mathbf{d}\right)\cdot 2\cdot r = \left(\pi\cdot(2\cdot r)^2\cdot \mathbf{d}\right)\cdot x$$

nach dem Hebelgesetz interpretieren konnte. Auf der linken Seite ist der Hebelarm 2·r, auf der rechten Seite x, und die Gleichung besagt nun, dass: - Kugelscheibe und Kegelscheibe zusammen, mit dem Hebelarm 2·r, und Zylinderscheibe, mit dem Hebelarm x - im Gleichgewicht sind.[2]



Der Hebelarm für Kegel- und Kugelscheiben bleibt immer konstant 2·r (dafür ändern sich die Scheibengrößen in Abhängigkeit von der Lage x der Schnittfläche), während sich der Hebelarm x der Zylinderscheiben verändert (dafür bleibt die Größe der Zylinderscheiben konstant).

Für den Zylinder ist der resultierende Hebelarm (Schwerpunktsbedingung) **r**.



3) Bestätige (auf den Spuren von Archimedes wandelnd):

$$\left(V_{Kegel} + V_{Kugel}\right)\cdot 2\cdot r = V_{Zylinder}\cdot r$$

$$V_{Kugel} = \frac{1}{2}\cdot V_{Zylinder} - V_{Kegel}$$

Archimedes war bekannt (das hat Eudoxos, 408 - 355 v. Chr., herausgefunden), dass für Zylinder und Kegel gilt, wenn Grundkreisradius und Höhe übereinstimmen:

$$V_{Kegel} = \frac{1}{3}\cdot V_{Zylinder}$$

---

2 Beachte: Bei den folgenden 3 Graphiken sind die Hebelarme nicht berücksichtigt. - Überlege dir, was sich verändert, wenn die Schnittfläche nach oben wandert, d.h. wenn x kleiner wird.

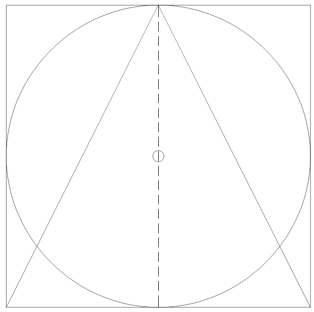
Zusammengefasst ergibt sich:

$$V_{Kugel} = \frac{1}{6} \cdot V_{Zylinder} = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot (2 \cdot r)^2 \cdot 2 \cdot r$$

$$\boxed{\mathbf{V_{Kugel} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}}$$

---

4) Bestätige, dass für die Volumina einer Kugel, einem ihr umbeschriebenen Zylinder, und einem dem Zylinder einbeschriebenen Kegel gilt:



$$\boxed{\mathbf{V_{Zylinder} : V_{Kugel} : V_{Kegel} = 3 : 2 : 1}}$$

Womit das Geheimnis des Grabsteins des Archimedes gelüftet wäre!

Quelle: Barth, Krumbacher, Matschiner, Ossiander: Anschauliche Geometrie 4; Verlag: Ehrenwirth 1989