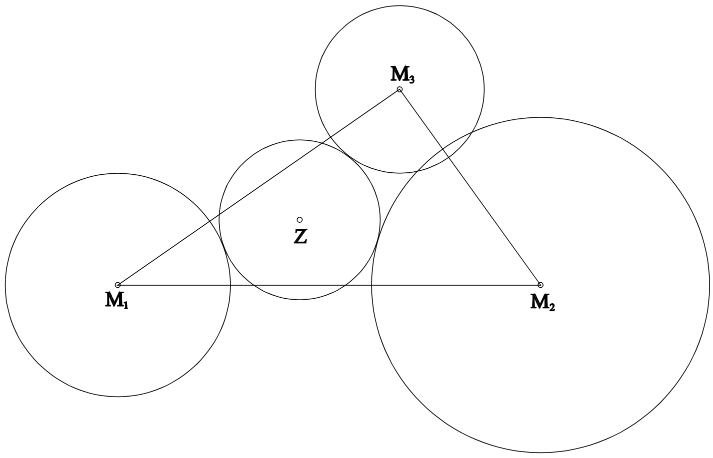
Das Berührkreisproblem des Apollonius

Gegeben sind 3 Kreise mit den Mittelpunkten M_1, M_2, M_3 und den Radien r_1, r_2, r_3. - Gesucht ist ein Kreis mit dem Mittelpunkt **Z** *und dem Radius* **z** *so, dass er die 3 gegebenen Kreise* *<u>außen</u>* *berührt.*

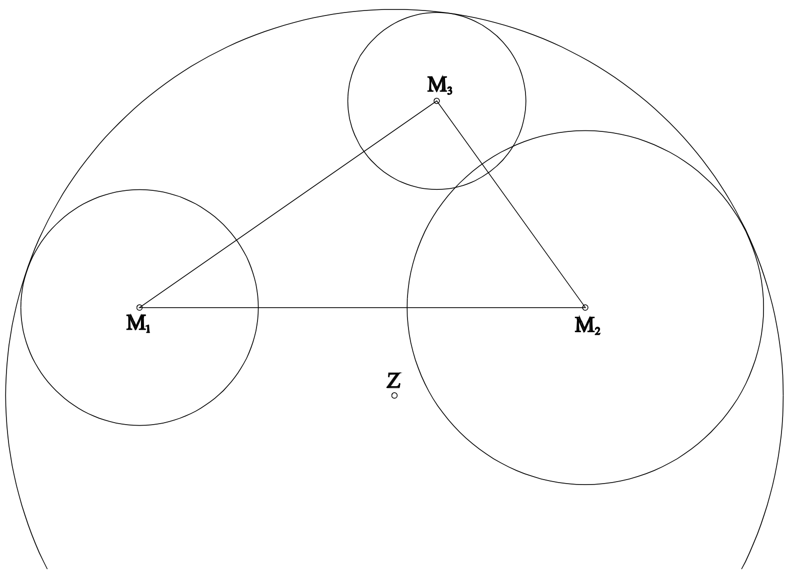
<u>Prinzipskizze:</u>



<u>Aufgabe 1:</u> Löse das Problem zunächst für den speziellen Fall: $r_1 = 4$, $r_2 = 6$ und $r_3 = 3$, und führe ein Koordinatensystem so ein, dass die x-Achse auf der Geraden durch M_1 und M_2 liegt und M_1 der Ursprung dieses Koordinatensystems ist.
Wir wählen dann für die restlichen beiden Kreismittelpunkte folgende Koordinaten:

M_2 (15 | 0) und M_3 (10 | 7).

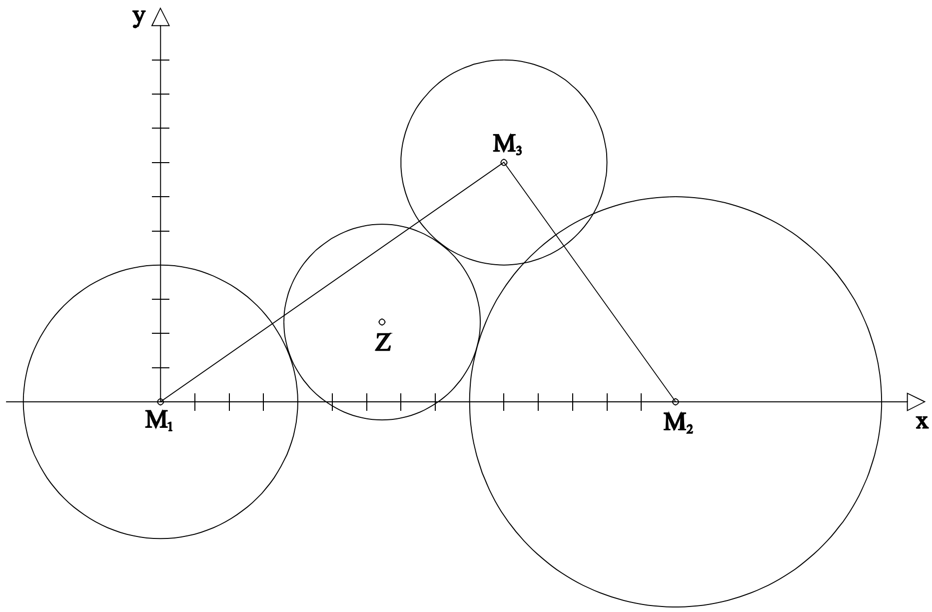
<u>Hinweis:</u> Benenne die Koordinaten von Z (x | y) und zeichne die Verbindungsstrecken von Z zu den Mittelpunkten der 3 Kreise ein. Finde algebraische Gleichungen für diese Streckenlängen (in Abhängigkeit von den Punktkoordinaten und den Radien) und löse das zugehörige Gleichungssystem. - Führe eine konstruktive Probe des Ergebnisses durch!



<u>Aufgabe 2:</u> Löse das Problem (mit den speziellen Werten) für den Fall, dass der Berührkreis von den 3 Kreisen <u>innen</u> berührt wird.

Das Berührkreisproblem des Apollonius

Eine Lösungsstrategie:



Es ergibt sich ein **nicht**lineares Gleichungssystem von 3 Gleichungen in 3 Variablen:

$$\left\{\begin{array}{lcccc} & x^2 & + & y^2 & = & (4+z)^2 \\ \wedge & (15-x)^2 & + & y^2 & = & (6+z)^2 \\ \wedge & (10-x)^2 & + & (7-y)^2 & = & (3+z)^2 \end{array}\right\}$$

(1) Alle Quadrate auf eine Seite!

$$\Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lccccccc} & x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & 16+8\cdot z \\ \wedge & x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & 36+12\cdot z+30\cdot x-225 \\ \wedge & x^2 & + & y^2 & - & z^2 & = & 9+6\cdot z+20\cdot x+14\cdot y-149 \end{array}\right\}$$

(2) Aus der 2. Gleichung (in Verbindung mit Gleichung 1) folgt:[1]

$$x = \frac{41}{6} - \frac{2}{15}\cdot z$$

(3) In die 3. Gleichung eingesetzt (in Verbindung mit Gleichung 1) ergibt:

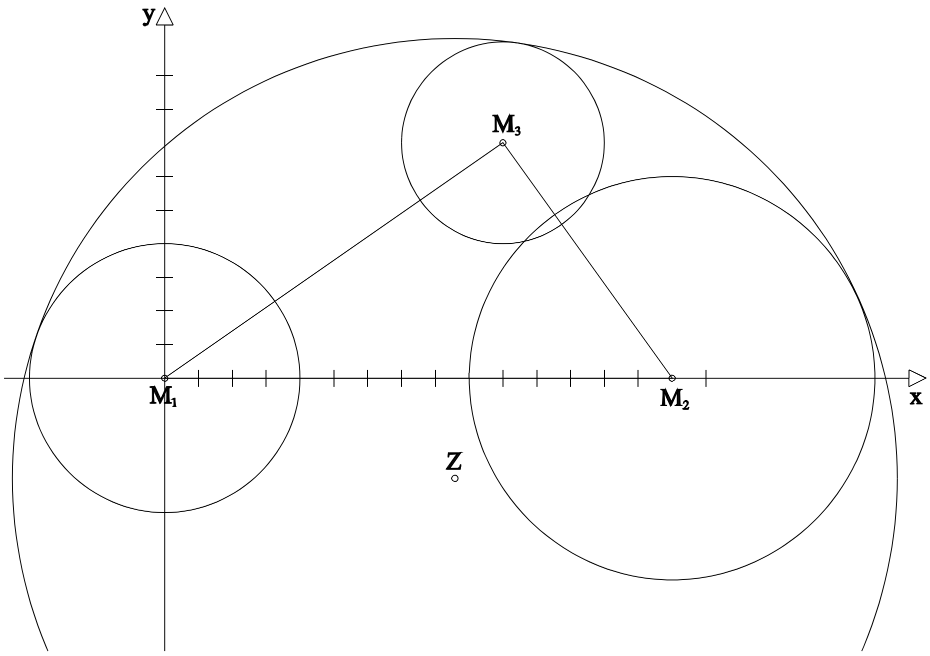
$$y = \frac{29}{21} + \frac{1}{3}\cdot z$$

(4) Und nun die Ergebnisse von (2) und (3) in Gleichung 1 eingesetzt ergibt eine quadratische Gleichung in der Variablen z, die maximal 2 Lösungen besitzt. - Beachte: Es sind natürlich nur positive Lösungen von Interesse!

---

1 Natürlich unbedingt nachrechnen! - Vielleicht habe ich mich verrechnet?!

(5) Kennt man den Radius z, so erhält man die Punktkoordinaten des Kreismittelpunktes aus den Ergebnissen von (2) und (3) !



Für den Fall, dass der Berührkreis von den 3 Kreisen innen berührt wird, ergibt sich das Gleichungssystem:[2]

$$\left\{\begin{array}{lcccc} & x^2 & + & y^2 & = & (z-4)^2 \\ \wedge & (15-x)^2 & + & y^2 & = & (z-6)^2 \\ \wedge & (10-x)^2 & + & (7-y)^2 & = & (z-3)^2 \end{array}\right\}.$$

Damit wird: $$x = \frac{41}{6} + \frac{2}{15}\cdot z$$

und $$y = \frac{29}{21} - \frac{1}{3}\cdot z.$$

Aufgabe 3: Gegeben sind die 3 Kreise:

$$\mathbf{k_1}\ (\ M_1(2\,|\,3)\ ;\ r_1 = 5\ )$$
$$\mathbf{k_2}\ (\ M_2(12\,|\,-5)\ ;\ r_2 = 6\ )$$
$$\mathbf{k_3}\ (\ M_3(9\,|\,10)\ ;\ r_3 = 4\ )$$

Finde die Mittelpunkte und Radien zweier Berührkreise, welche die 3 Kreise außen und innen berühren.

....

[2] Näherungslösungen zu Aufgaben 1 und 2 zum Vergleich: **z** = 2,861267 ; **Z**(6,451831 | 2,334708)
z = 13,079928 ; **Z**(8,577323 | -2,979023)

Das Berührkreisproblem des Apollonius

Aufgabe 4: Finde den Mittelpunkt und den Radius eines Berührkreises, der die Kreise $\mathbf{k_1}$ und $\mathbf{k_2}$ aus Aufgabe 3 außen und den Kreis $\mathbf{k_3}$ innen berührt. - Kontrolliere die Rechnung durch Konstruktion.

Aufgabe 5: Untersuche den Fall, dass die Mittelpunkte der 3 Kreise auf einer Geraden liegen. - Könnte dies Probleme bei der Bestimmung eines äußeren oder inneren Berührkreises bereiten?

Müssen die Radien der 3 Kreise unterschiedlich sein?

Das nebenstehend skizzierte Kirchenfenster findet man in Frankfurt am Main an der Leonhardkirche und der Katharinenkirche.

Mit den eingezeichneten Hilfslinien erkennt man, dass es sich z.T. um ein Berührkreisproblem von 3 Kreisen handelt.

Analysiere die Gesamtfigur und bestimme Lage und Radius **r** des Berührkreisbogens in Abhängigkeit von Radius **R** des äußeren Halbkreises (**R** ist halb so groß wie die Kämpferlinie).

Überprüfe deine Rechnung durch exemplarische Konstruktion der Figur im Heft. Achte auf eine vernünftige Größe der Gesamtfigur.