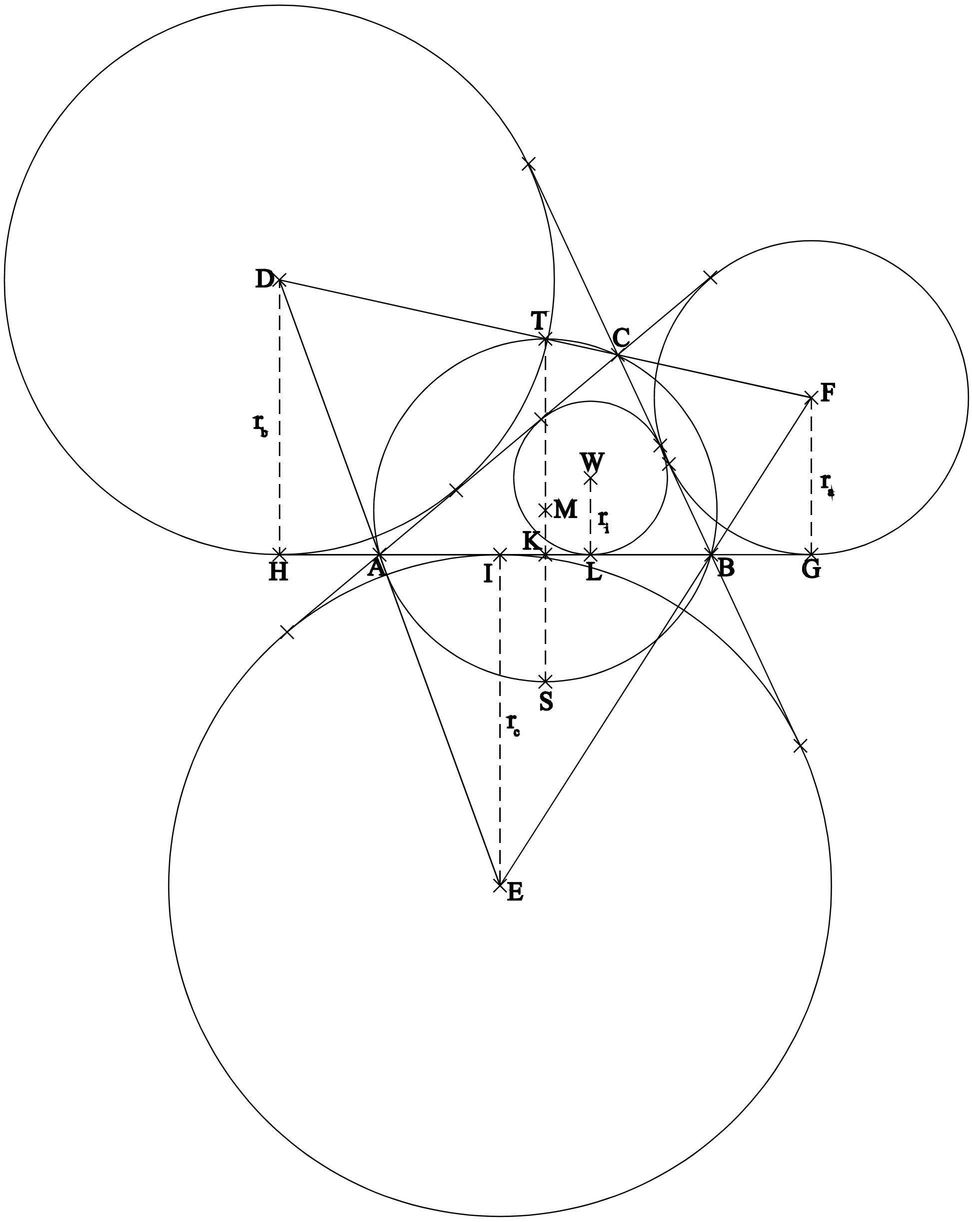
Dreieck und fünf Kreise

Auf den Spuren von Jakob Steiner

Die skizzierte Ankreisfigur ist uns schon mehrfach begegnet, insbesondere im Zusammenhang mit dem Flächeninhalt eines Dreiecks. Eine besondere Bedeutung hatte in diesem Zusammenhang die halbe Umfangslänge **s** und die Radien des Innenkreises und der drei Ankreise $\mathbf{r_i}$ und $\mathbf{r_a}$, $\mathbf{r_b}$, $\mathbf{r_c}$. - Du erinnerst dich?



In die Figur wurde nun noch der Umkreis des Dreiecks als fünfter Kreis eingezeichnet und wir wollen den Radius dieses Kreises mit **R** bezeichnen. - Gibt es eigentlich einen gesetzmäßigen Zusammenhang der Radien dieser fünf Kreise?

Einen solchen Zusammenhang hat Jakob Steiner entdeckt, ein Schweizer Mathematiker, der auch lange in Berlin gewirkt hat und der dir vielleicht schon in Klassenstufe 7 bei der Lösung des Malfattischen Problems begegnet ist.

Es gilt:[1]

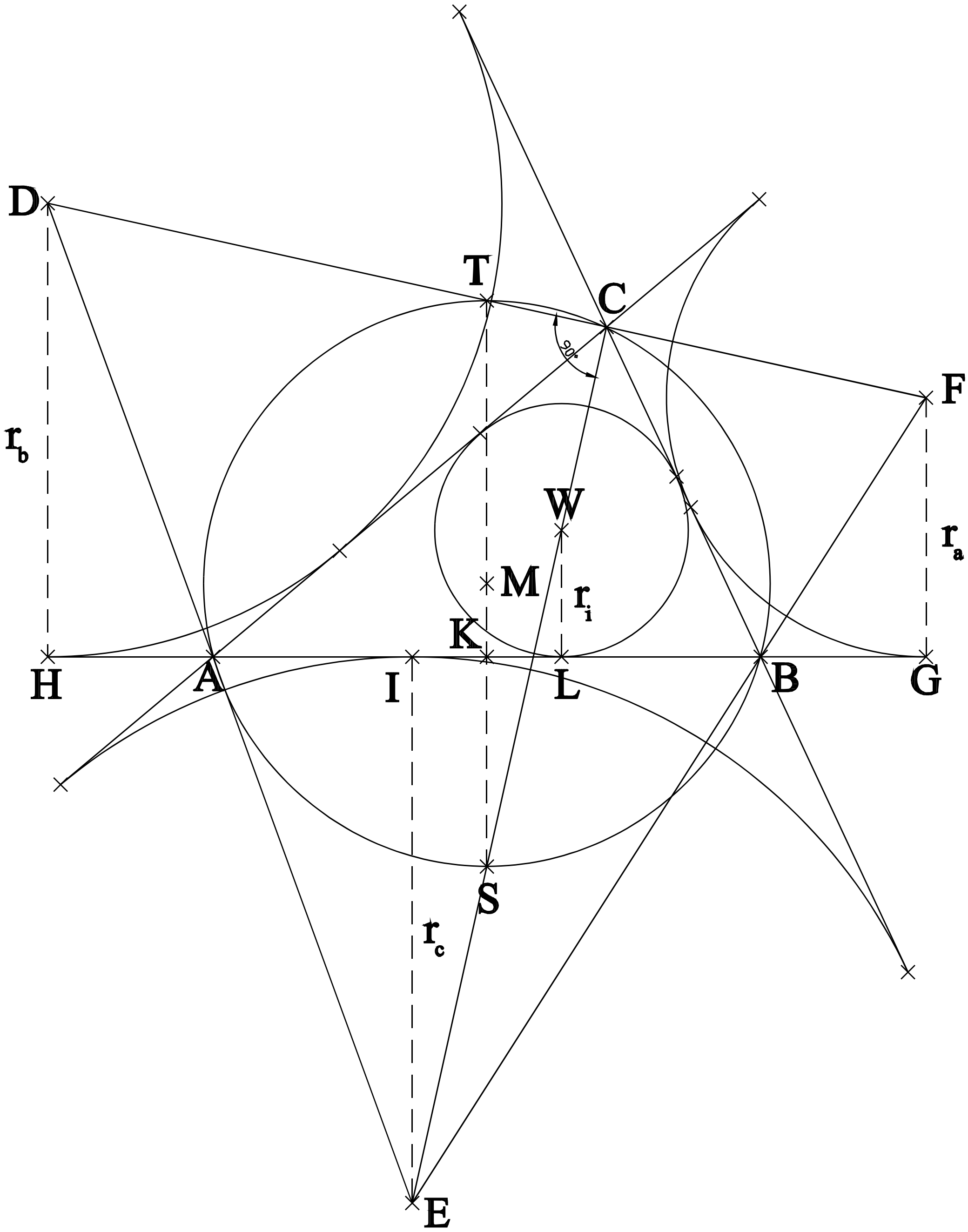
$$\boxed{\mathbf{r_a} + \mathbf{r_b} + \mathbf{r_c} - \mathbf{r_i} = 4 \cdot \mathbf{R}}$$

1 Quelle: Antonio Gutierrez: „Steiner‘s Theorem“

Dreieck und fünf Kreise

Auf den Spuren von Jakob Steiner

1. Überprüfe die angegebene Beziehung beispielhaft durch Nachmessen an der folgenden Konstruktion, wo der Übersichtlichkeit wegen nur Ausschnitte der Ankreise skizziert sind.



2. <u>Begründe:</u>

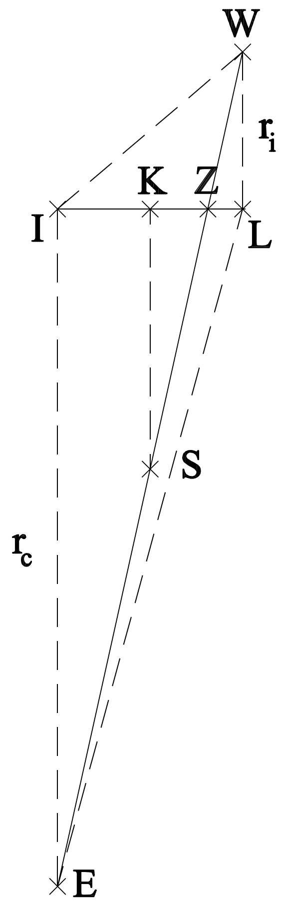
   – K ist sowohl Mittelpunkt von AB, als auch von HG und IL.
   (Tipp: „Flächeninhalt und Umfangslänge"; Klasse 7)

   – $(\, S \in g(E,C) \,) \wedge (\, W \in g(E,C) \,)$

   – $2 \cdot \mathbf{R} = \overline{TS} = \overline{TK} + \overline{KS} = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{r_a} + \mathbf{r_b}\right) + \overline{KS}$

....

Zur Bestimmung der Länge von KS betrachten wir nur noch das Viereck ☐WIEL. Der Schnittpunkt der Diagonalen EW und IL sei mit Z bezeichnet.



3. Begründe:

– S ist Mittelpunkt von EW

– $\frac{\mathbf{r_c}}{\mathbf{r_i}} = \frac{\overline{EZ}}{\overline{ZW}}$

– $\overline{EZ} - \overline{SZ} = \overline{SZ} + \overline{ZW}$

– $\overline{KS} = \mathbf{r_i} \cdot \frac{\overline{SZ}}{\overline{ZW}}$

– $\boxed{\overline{KS} = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{r_c} - \mathbf{r_i}\right)}$

Die letzte Beziehung ergibt sich durch geeignete Kombination der vorherigen drei Strahlensatzbeziehungen.

Setze den Ausdruck $\overline{KS} = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{r_c} - \mathbf{r_i}\right)$ in die Gleichung $2 \cdot \mathbf{R} = \frac{1}{2} \cdot \left(\mathbf{r_a} + \mathbf{r_b}\right) + \overline{KS}$ ein und zeige als letzten Schritt:

$$\boxed{\mathbf{r_a} + \mathbf{r_b} + \mathbf{r_c} - \mathbf{r_i} = 4 \cdot \mathbf{R}}$$

---

4. Gegeben sei ein Dreieck mit den Seitenlängen: c := 8 cm, b := 6 cm und a := 5 cm. - Berechne die Radien aller fünf Kreise, d.h. den Radius des Innenkreises, die Radien der 3 Ankreise und den Radius **R** des Außenkreises. Es genügen Näherungswerte mit TR-Genauigkeit von 2 Nachkommastellen.

   Erinnere dich an die früher hergeleiteten Beziehungen, z. B. gilt:

$$\mathbf{r_a} = \sqrt{\frac{s \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{(s-a)}} \quad \text{und} \quad \mathbf{r_i} = \sqrt{\frac{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}{s}}$$

Eine interessante Folgerung:

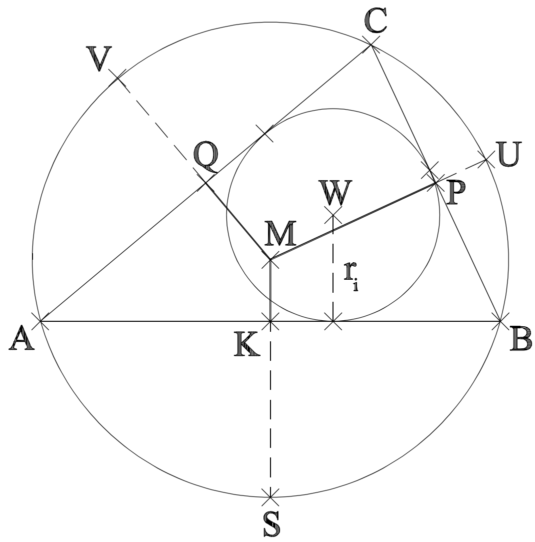
5. Berechne die Summe der Abstände, die der Mittelpunkt des Außenkreises eines Dreiecks von den Dreiecksseiten besitzt.

   Tipp: Versuche es mit dem Ansatz

   $\overline{MK} + \overline{MP} + \overline{MQ} = 3 \cdot \mathbf{R} - \overline{KS} - \overline{PU} - \overline{QV}$

   und beachte bei der Berechnung der Streckenlängen unseren Aufgabenteil 3.

   Überprüfe das Ergebnis ($\mathbf{R} + \mathbf{r_i}$) auch durch Messung am vorherigen Beispiel.



Ein interessanter Sonderfall:

6. Es gelte: $\boxed{\overline{AB} = 2 \cdot \mathbf{R}}$.

   Beweise:

   Da das Dreieck ΔABC am Eckpunkt C rechtwinklig ist gilt:

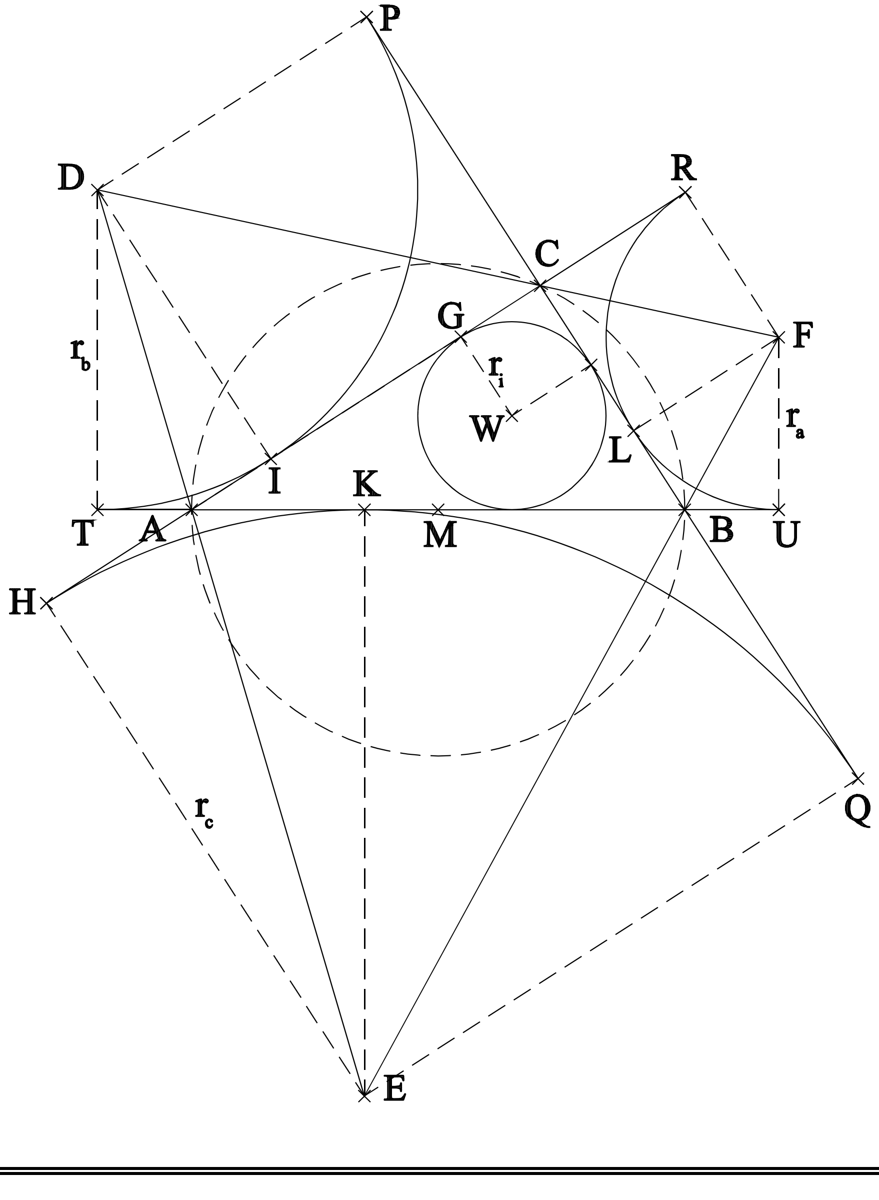
   $\boxed{\mathbf{r_c} = \mathbf{r_b} + \mathbf{r_i} + \mathbf{r_a}}$

   Tipp: Versuche es mit dem Ansatz

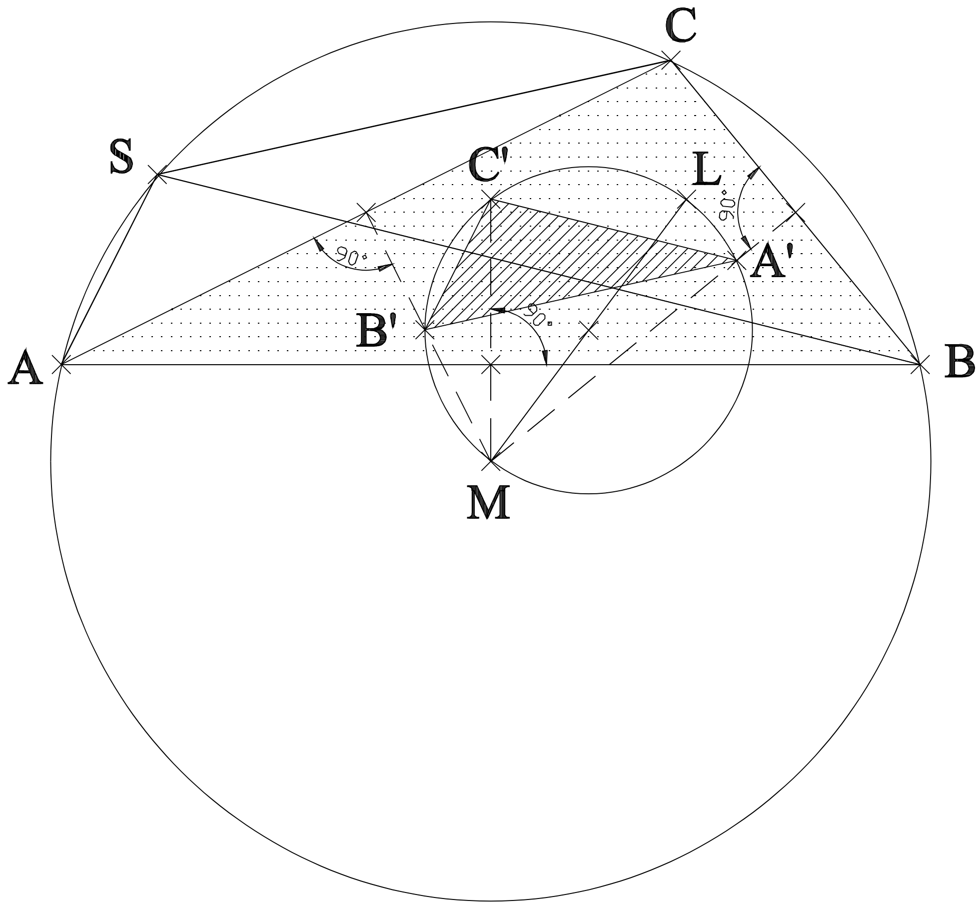
   $\overline{CH} = \overline{CI} + \overline{IA} + \overline{AH}$

   und erinnere dich, wo in der Ankreisfigur gleiche Streckenlängen z.B. der Größe (s - c) oder (s - b) auftauchen.

   Überprüfe die obige Aussage des Spezialfalles auch durch Messung am nebenstehenden Beispiel.



Nachtrag: Von einer weiteren, berühmten Entdeckung Jakob Steiners wollen wir nur die Konstruktion (ohne Beweis) nachvollziehen. Wir konstruieren den Steiner-Punkt **S** eines Dreiecks ΔABC.



M ist der Mittelpunkt des Umkreises. Den Punkt L (Lemoine-Punkt) erhält man folgendermaßen: Spiegelt man jede Seitenhalbierende an der zugehörigen Winkelhalbierenden (mit gleichem Eckpunkt), so verlaufen diese drei Geraden (Symmedianen) durch einen Punkt L. Der Kreis mit ML als Durchmesser heißt Brocard-Kreis[2]. Zeichnet man nun Senkrechten zu den Dreiecksseiten durch den Mittelpunkt M des Umkreises, so wird der Brocard-Kreis in drei Punkten A‘, B‘ und C‘ geschnitten. Diese drei Punkte bilden das Brocard-Dreieck.
Nun zeichnen wir Parallelen zu den Seiten des Brocard-Dreiecks durch den jeweils zugehörigen Punkt des Ausgangsdreiecks. Jakob Steiner hat gezeigt, dass diese drei Parallelen durch einen Punkt **S** auf dem Umkreis verlaufen.

[2] Henri Pierre René Jean Baptiste **Brocard**, ✳ 12. 05. 1845 in Vignot (Commercy), † 16. 01. 1922 in Bar-le-Duc, Frankreich