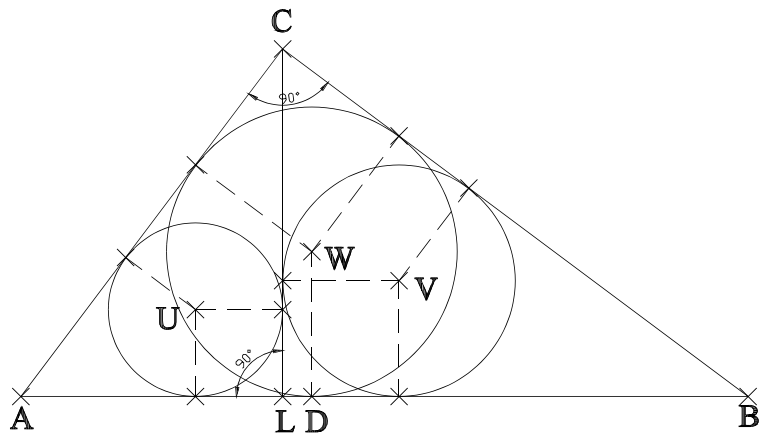


# Rechtwinklige Dreiecke und Innenkreise

Drei an der Zahl, - das hatten wir doch schon mal.

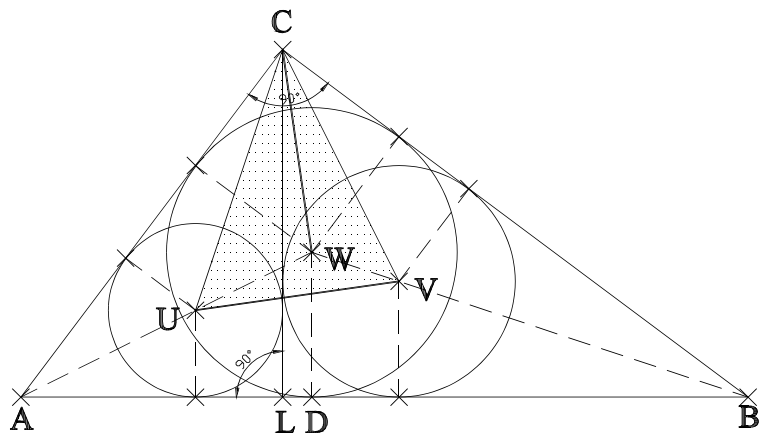
Der nebenstehende Konstruktion ist dir möglicherweise schon aus Klassenstufe 7 bekannt.<sup>1</sup> Die damals entdeckten Sachverhalte waren jedoch geometrisch nur schwer zu begründen und es fehlten zu einem exakten Beweis Kenntnisse mathematischer Verfahren. - Dies ist jetzt jedoch anders.

Falls du dich an die damaligen Aussagen über die drei rechtwinkligen Dreiecke mit ihren drei Innenkreisen nicht mehr erinnerst, dann musst du diese Figur erneut untersuchen. - Sind deine Nachbarn schon zu sinnvollen Aussagen gelangt? - Decken sich diese Aussagen mit deinen Analysen?



## Behauptungen:

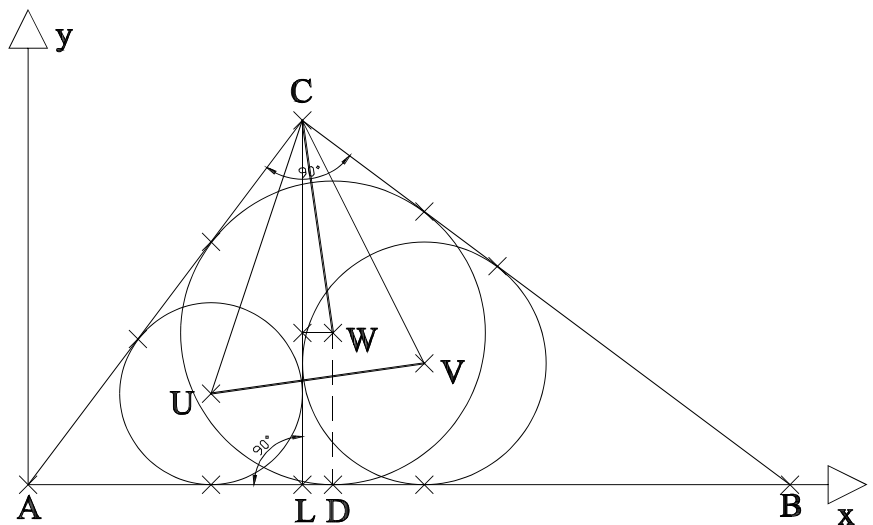
- 1)  $\overline{CW} = \overline{UV}$
- 2)  $g(C; W) \perp g(U; V)$
- 3) W ist Höhenschnittpunkt im Dreieck  $\Delta UVC$
- 4)  $r_U + r_V + r_W = h_c (= \overline{LC})$



Sicherlich könnten wir, wie in Klasse 7, einen geometrischen Beweis versuchen, der nun z.B. auch Strahlensätze verwenden könnte.

Wir wollen jedoch, zur Übung, die obigen Behauptungen konkret rechnerisch bestätigen.

Zeichne dazu ein rechtwinkliges Dreieck mit den Maßen  $a = 8$  cm und  $b = 6$  cm, so wie nebenstehend, in ein kartesisches Koordinatensystem.



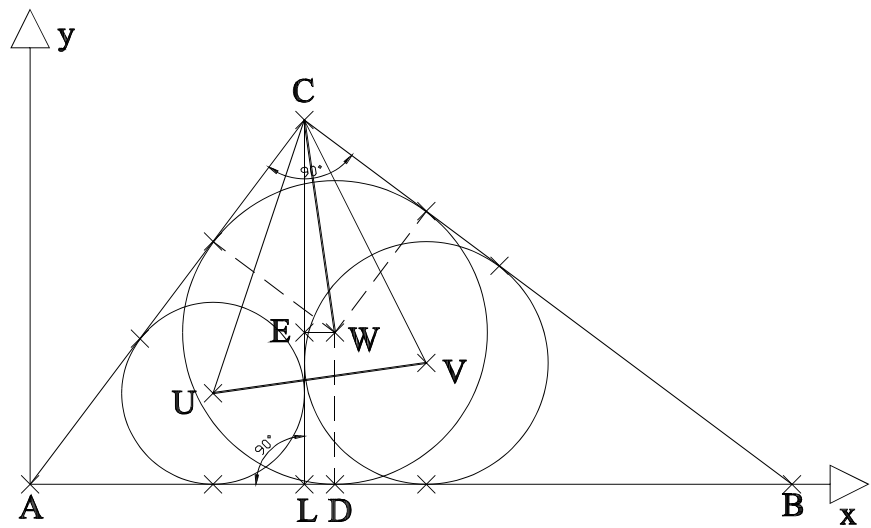
<sup>1</sup> Arbeitsblatt: „Kreis und Gerade“

# Rechtwinklige Dreiecke und Innenkreise

Drei an der Zahl, - das hatten wir doch schon mal.

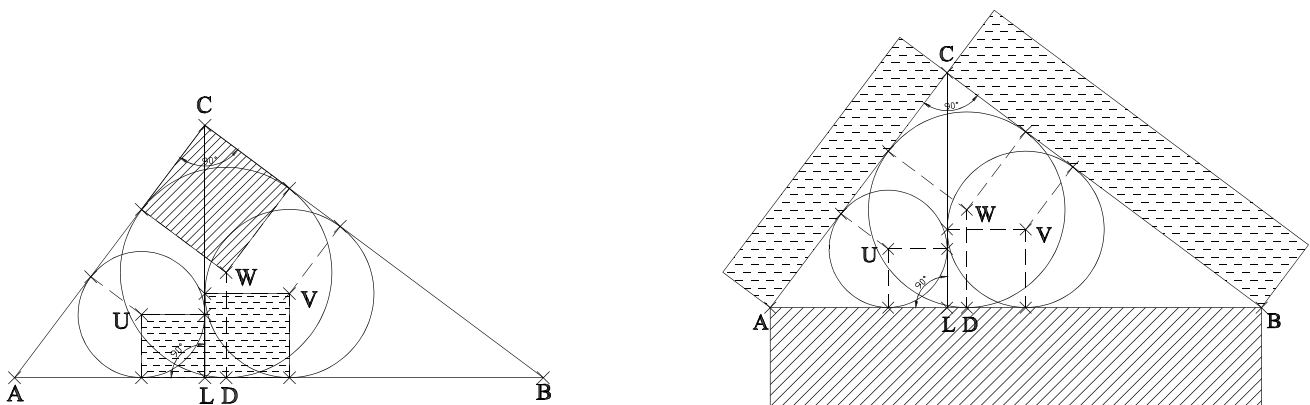
## Aufgaben:

- Bestimme die Maße von  $c$ ,  $h$ ,  $p$  und  $q$  unter Verwendung von Sätzen der Satzgruppe des Pythagoras.
- Bestimme die Größen der Radien der drei Innenkreise und bestätige damit die Behauptung 4).<sup>2</sup>
- Bestimme die Koordinaten der Punkte:  $B$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $U$ ,  $V$  und  $W$ .  
Tipp:  $CW$  ist Diagonale in einem Quadrat; zur Bestimmung der  $x$ -Koordinate von  $W$  das Dreieck  $\triangle CEW$  betrachten.
- Bestätige die Behauptung 1).
- Bestätige die Behauptung 2) durch Bestimmung von Steigungsgrößen zugehöriger Geraden.
- Bestimme Geradengleichungen der Winkelhalbierenden  $w_\alpha$  und  $w_\beta$  und zeige, dass diese Winkelhalbierenden jeweils senkrecht zu einer Seite des Dreiecks  $\triangle UVC$  verlaufen. Damit ist Behauptung 3) bestätigt.
- Bestätige, dass gilt:  $r_U^2 + r_V^2 = r_W^2$ . Interpretiere dieses Ergebnis geometrisch.
- Bestätige, dass gilt:  $a \cdot r_V + b \cdot r_U = c \cdot r_W$ . Interpretiere dieses Ergebnis geometrisch.



## Einige Ergebnisse zum Vergleich:

$$B(10|0); C\left(\frac{18}{5} \mid \frac{24}{5}\right); D\left(\frac{20}{5} \mid 0\right); U\left(\frac{12}{5} \mid \frac{6}{5}\right); V\left(\frac{26}{5} \mid \frac{8}{5}\right); W\left(\frac{20}{5} \mid 2\right); \overline{UV} = 2 \cdot \sqrt{2}; m_{CW} = -7; m_{UV} = \frac{1}{7}$$



<sup>2</sup> Erinnerung: In einem rechtwinkligen Dreieck gilt:  $a + b = c + 2 \cdot r_1$ . Beweis?

## Rechtwinklige Dreiecke und Innenkreise

Drei an der Zahl, - das hatten wir doch schon mal.

Nachtrag für Interessierte:

Die zuvor am konkreten Beispiel bestätigten Sachverhalte lassen sich natürlich auch allgemein beweisen. Der allgemeine Nachweis ist jedoch z.T. sehr mühsam. Im folgenden allgemeine Nachweise von Aufgaben, z.T. über Äquivalenzumformungen unter mehrfacher Verwendung von Sätzen der Satzgruppe des Pythagoras.

Es gilt: 
$$r_W = \frac{1}{2} \cdot (a+b-c) \wedge r_V = \frac{1}{2} \cdot (h+q-a) \wedge r_U = \frac{1}{2} \cdot (h+p-b) \quad \Rightarrow$$

g) 
$$r_U^2 + r_V^2 = r_W^2$$

$$\Leftrightarrow (h+q-a)^2 + (h+p-b)^2 = (a+b-c)^2$$

$$\Leftrightarrow (h+q)^2 - 2 \cdot a \cdot (h+q) + (h+p)^2 - 2 \cdot b \cdot (h+p) = (a+b)^2 - 2 \cdot c \cdot (a+b)$$

$$\Leftrightarrow (p+q)^2 + 2 \cdot h \cdot c - 2 \cdot a \cdot (h+q) - 2 \cdot b \cdot (h+p) = c^2 + 2 \cdot a \cdot b - 2 \cdot a \cdot c - 2 \cdot b \cdot c$$

$$\Leftrightarrow h \cdot c - a \cdot (h+q) - b \cdot (h+p) = a \cdot b - a \cdot c - b \cdot c$$

$$\Leftrightarrow h \cdot c - a \cdot h - b \cdot h = a \cdot b - a \cdot p - b \cdot q$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{p \cdot q} \cdot (c-a-b) = \sqrt{c \cdot q} \cdot b - \sqrt{c \cdot q} \cdot p - \sqrt{c \cdot p} \cdot q$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c^2 \cdot p \cdot q} - \sqrt{c \cdot p \cdot q^2} - \sqrt{c \cdot p^2 \cdot q} = \sqrt{c^2 \cdot q \cdot p} - \sqrt{c \cdot q \cdot p^2} - \sqrt{c \cdot p \cdot q^2}$$

Da die letzte Gleichung wahr ist, und nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist die erste Gleichung für jedes rechtwinklige Dreieck  $\Delta ABC$  ( $\bar{\gamma} = 90^\circ$ ) richtig.

h) 
$$a \cdot r_V + b \cdot r_U = c \cdot r_W$$

$$\Leftrightarrow a \cdot (h+q-a) + b \cdot (h+p-b) = c \cdot (a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow a \cdot h + a \cdot q + b \cdot h + b \cdot p = c \cdot a + c \cdot b$$

$$\Leftrightarrow a \cdot h + b \cdot h = p \cdot a + q \cdot b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{c \cdot q \cdot p \cdot q} + \sqrt{c \cdot p \cdot p \cdot q} = \sqrt{p^2 \cdot q \cdot c} + \sqrt{q^2 \cdot p \cdot c}$$

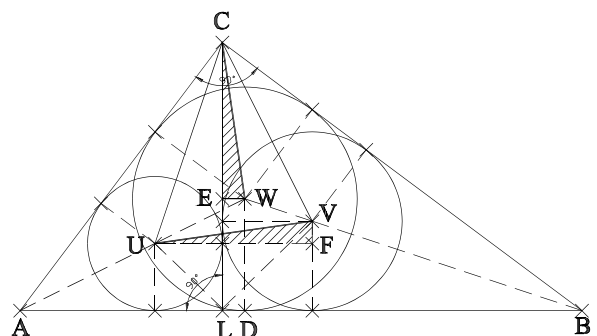
Da die letzte Gleichung wahr ist, und nur Äquivalenzumformungen durchgeführt wurden, ist die erste Gleichung für jedes rechtwinklige Dreieck  $\Delta ABC$  ( $\bar{\gamma} = 90^\circ$ ) richtig.

b) 
$$r_U + r_V + r_W = \frac{1}{2} \cdot (h+p-b) + \frac{1}{2} \cdot (h+q-a) + \frac{1}{2} \cdot (a+b-c) = h$$

d), e) Die beiden schraffierten Dreiecke sind kongruent nach Kongruenzsatz SWS.

$$\overline{UF} = \overline{EC} = r_U + r_V$$

$$\begin{aligned} (\overline{EW})^2 &= (\sqrt{2} \cdot r_W)^2 - (r_U + r_V)^2 \\ &= 2 \cdot r_W^2 - r_U^2 - r_V^2 - 2 \cdot r_U \cdot r_V \\ &= r_U^2 + r_V^2 - 2 \cdot r_U \cdot r_V = (r_V - r_U)^2 \\ \overline{EW} &= \overline{FV} = r_V - r_U \end{aligned}$$

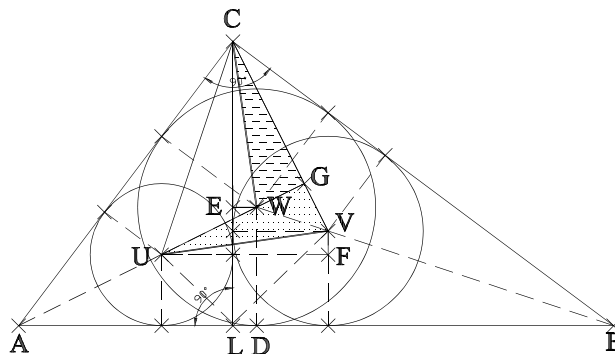


## Rechtwinklige Dreiecke und Innenkreise

Drei an der Zahl, - das hatten wir doch schon mal.

Aus der Kongruenz der Dreiecke  $\triangle CEW$  und  $\triangle UFV$  folgen die Behauptungen 1) und 2) allgemein, d.h. insbesondere, dass  $CW$  auf einer Höhe im Dreieck  $\triangle UVC$  liegt.

- f) Die Verlängerung von  $UW$  trifft  $VC$  in einem Punkt  $G$ . - Die Dreiecke  $\triangle UVG$  und  $\triangle CWG$  sind (rechtwinklig) kongruent, womit  $UG$  Höhe im Dreieck  $\triangle UVC$  ist. Damit ist  $W$  Schnittpunkt von 2 Höhen im Dreieck  $\triangle UVC$ , womit auch die dritte Höhe durch  $W$  verlaufen muss.  
Nachweis der Kongruenz nach Kongruenzsatz WSW:



- $\sphericalangle WCG = \sphericalangle VUG$ , weil gilt:  
 $\sphericalangle ECG = \sphericalangle FUG = \frac{1}{2} \cdot \bar{\alpha}$  und  
 $\sphericalangle ECW = \sphericalangle FUV$
- $\overline{CW} = \overline{UV}$
- $\sphericalangle GVU = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \bar{\alpha} + \sphericalangle FUV = 90^\circ - \frac{1}{2} \cdot \bar{\alpha} + \sphericalangle ECW = \sphericalangle GWC$

Verwendet man die Ähnlichkeit der Dreiecke  $\triangle ABC$ ,  $\triangle CAL$  und  $\triangle BCL$ , so erscheinen einige Begründungen möglicherweise einfacher.

$$\frac{h}{b} = \frac{a}{c} \Rightarrow h = \frac{a \cdot b}{c}; \quad \frac{p}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow p = \frac{b^2}{c}; \quad \frac{q}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow q = \frac{a^2}{c}$$

$$r_U = \frac{h+p-b}{2} = \frac{b}{c} \cdot \frac{a+b-c}{2}; \quad r_V = \frac{h+q-a}{2} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a+b-c}{2}; \quad r_W = \frac{a+b-c}{2} = \frac{c}{c} \cdot \frac{a+b-c}{2}$$

Die obige (geschickte) Darstellung der Radien der Innenkreise gestattet nun ein relativ leichtes Nachrechnen vorheriger Behauptungen unter Verwendung, dass  $a^2 + b^2 = c^2$  gilt.