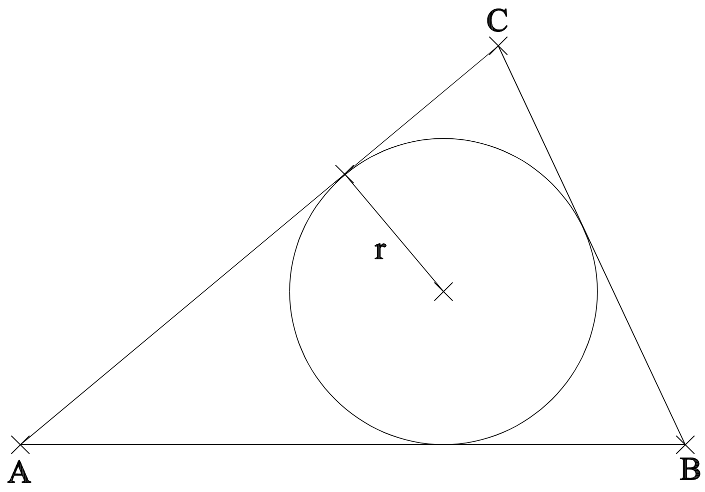
Flächeninhalt ohne Höhen
die Dreieckformel von Heron (oder Archimedes?)

Aufgabe 1:

Zeichne in dein Heft einen Kreis mit beliebigem Radius **r** (aber bitte nicht zu klein), und konstruiere ein umbeschriebenes Dreieck.

Deine Zeichnung könnte etwa so aussehen wie die nebenstehende Skizze. Beachte, dass der Radius senkrecht zu einer Seite im Berührpunkt verläuft.

Miss nun die 3 Seitenlängen deines Dreiecks und die Größe von **r**.[1]



$\mathbf{c} = \overline{AB} =$

$\mathbf{a} = \overline{BC} =$

$\mathbf{b} = \overline{AC} =$

$\mathbf{r} =$

Die Summe der drei Seitenlängen eines Dreiecks nennt man die Umfangslänge **U**. - Bilde nun das Produkt:

$$\mathbf{U \cdot r} =$$

Das Produkt zweier Streckenlängen stellt sicher einen Flächeninhalt dar. - Jedoch welchen?

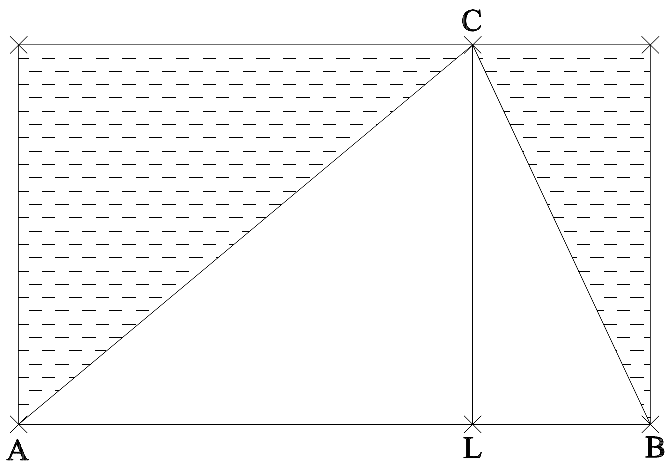
....

Aufgabe 2:

Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC.

Wie geht das eigentlich? - Fälle vom Punkt C das Lot auf die Grundseite AB und miss die Höhe:

$$\mathbf{h_c} = \overline{LC} =$$



Mit Hilfe der schraffierten Ergänzung der Figur ist es sicher möglich, den Flächeninhalt $\mathbf{A_\Delta}$ zu bestimmen.

$$\mathbf{A_\Delta} =$$

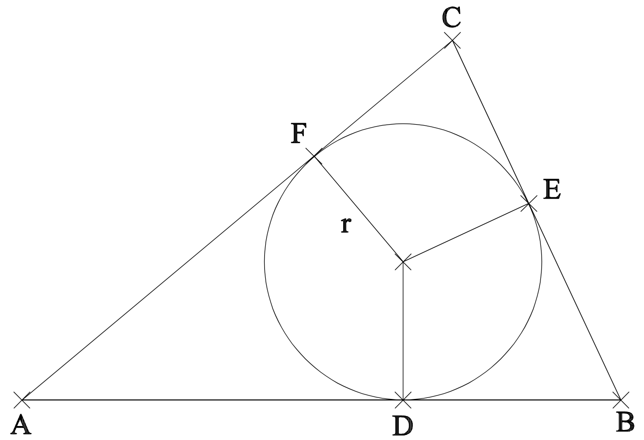
Gibt es einen Zusammenhang zu der vorherigen Größe **U · r** ? - Vergleiche mit den Ergebnissen deiner Nachbarn.

....

[1] Eigentlich sind die Messwerte nur Näherungswerte. Wir verwenden hier dennoch das Zeichen: '=' statt '≈'.

Flächeninhalt ohne Höhen
die Dreieckformel von Heron (oder Archimedes?)

Aufgabe 3:



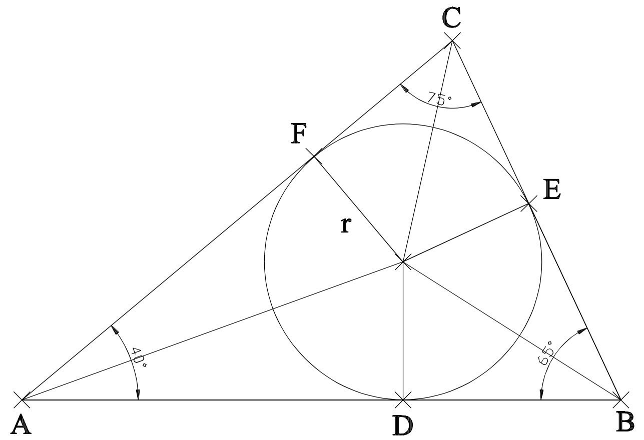
Konstruiere die erste Figur mit deinen Maßen in anderer Reihenfolge! - Beginne mit der Dreiecks-konstruktion und konstruiere danach den Innenkreis!

Kennzeichne auch die Berührpunkte des Kreises mit dem Dreieck, etwa so wie in der nebenstehenden Figur.

Moment einmal, - wie findet man eigentlich den Mittelpunkt des Innenkreises ?

Wer wirklich fit ist, der konstruiert Kreis und Berührpunkte nur mit Zirkel und Lineal nach den Grundkonstruktionen der Griechen (möglichst wenig Hilfslinien einzeichnen)!

Aufgabe 4:

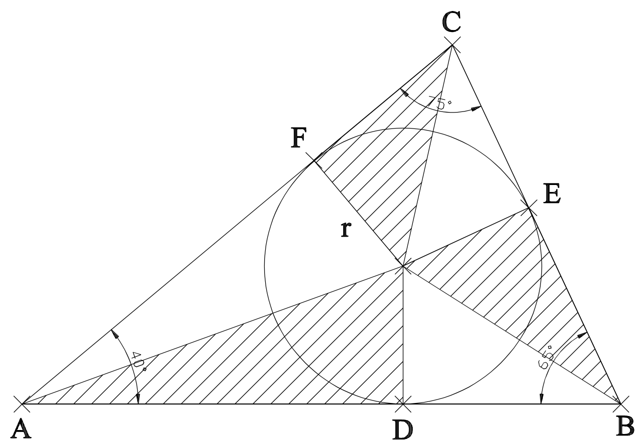


Begründe, dass der Mittelpunkt des Innenkreises der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden ist.

Kennzeichne die Winkel geeignet!

Durch die Lote und die Winkelhalbierenden, die sich alle im Mittelpunkt des Innenkreises treffen, wird das Dreieck in 6 Teildreiecke zerlegt.

Aufgabe 5: (Das ist die vorläufige Krönung!)



Begründe, das jeweils 2 Teildreiecke kongruent sind und dass sich diese 2 Teildreiecke zu jeweils einem Rechteck zusammenlegen lassen.

Bestimme den Flächeninhalt des Dreieckes über diese 3 Rechtecke!

Bei jedem dieser Rechtecke taucht der Innenkreisradius als ‘Breite’ auf. - Was ist die Summe der Rechteckslängen?

Begründe: $\mathbf{A}_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U} \cdot \mathbf{r}$

Flächeninhalt ohne Höhen
die Dreieckformel von Heron (oder Archimedes?)

Das vorherige ist dir vielleicht schon aus Klassenstufe 7 bekannt gewesen (eine Wiederholung schadet ja manchmal auch nichts weil man zuweilen etwas vergesslich ist), doch jetzt wandeln wir noch ein wenig weiter auf den Spuren der großen griechischen Mathematiker.[2]

Wir wollen deshalb auch die von Heron verwendeten Bezeichnungsweisen übernehmen und setzen: $\mathbf{s} := \frac{1}{2} \cdot \mathbf{U}$.

<u>Aufgabe 6:</u> Begründe, dass gilt: $\mathbf{A}_\Delta = (s-a) \cdot r + (s-b) \cdot r + (s-c) \cdot r$

Nun, ich weiß nicht, wie Heron die nun folgende Beziehung gefunden hat, eine Formel, die schon Archimedes gekannt haben soll, denn sie hat nicht direkt mit dem Flächeninhalt des Dreieckes zu tun, sondern mit dem Quadrat des Flächeninhaltes!

<u>Aufgabe 7:</u> Bilde mit den Maßzahlen deines speziellen Dreieckes folgenden Ausdruck:[3]

$$s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$$

Bestätige, dass gilt: $\boxed{\mathbf{A}_\Delta = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}}$

Berechne damit den Radius des Innenkreises deines Dreiecks.

Wir wollen uns im folgenden dem Beweis dieser berühmten Dreiecksformel mit einzelnen Schritten nähern.

<u>Aufgabe 8:</u>

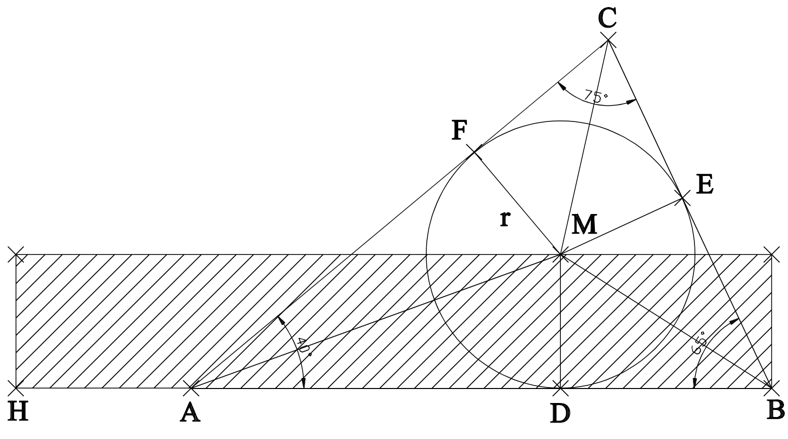
Die Grundseite AB wurde über A hinaus um die Länge der Strecke FC verlängert, d.h. es gilt:

$$\overline{HA} = \overline{FC}.$$

Begründe, dass der schraffierte Flächeninhalt des Rechteckes genauso groß wie der Flächeninhalt des Dreieckes ist, d.h. es gilt:

$$\mathbf{A}_\Delta = \overline{HB} \cdot \overline{DM}$$

wobei **M** den Mittelpunkt des Innenkreises bezeichnen soll.

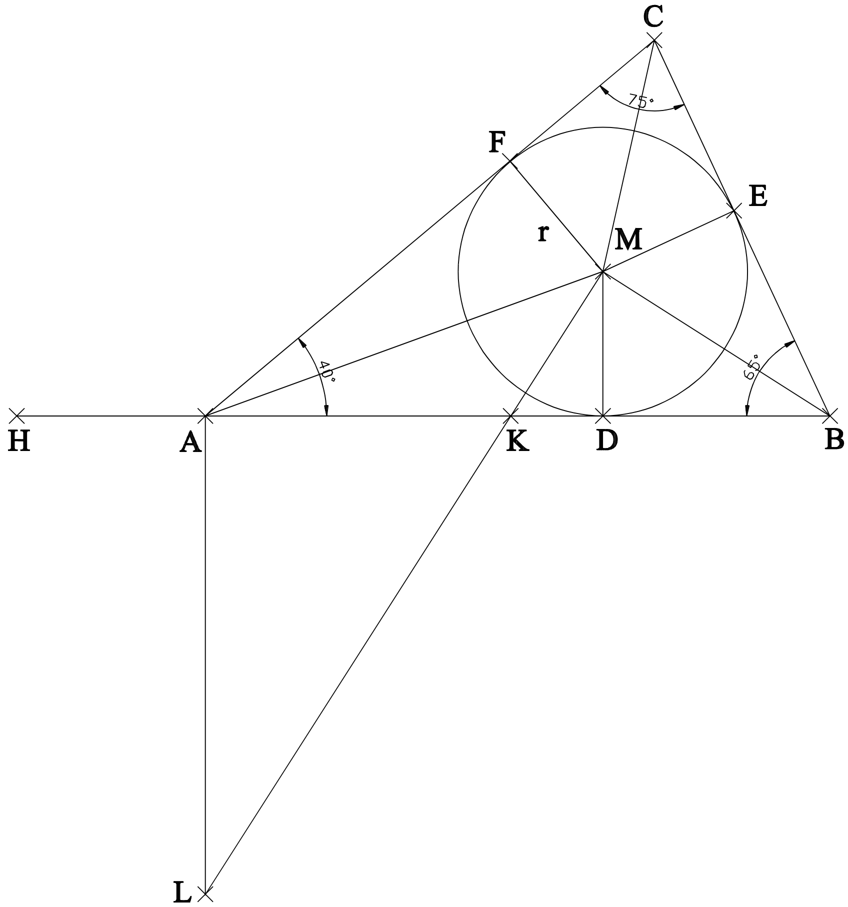


---

[2] <u>Quelle:</u> C.J .Scriba / P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie (Springer-Verlag)

[3] Unglaublich! - Wie kommt man nur auf so etwas?

Ergänze nun die Figur so wie nebenstehend. - Eventuell solltest du neu beginnen, falls es schon zu unübersichtlich geworden ist. -



Der Punkt **L** wird so konstruiert:

$LM \perp BM$
und $LA \perp AB$.

Der Punkt **K** ist der Schnittpunkt von LM und AB.

<u>Aufgabe 9:</u> Begründe, dass gilt:

Die Punkte L, B, M, A liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt der Strecke LB.[4]

....

Damit ist das Viereck □LBMA Sehnenviereck eines Kreises.
Da wir wissen, dass die gegenüberliegenden Winkelgrößen bei einem Sehnenviereck 180° ergeben, folgt:

(1) $\overline{\sphericalangle AMB} + \overline{\sphericalangle BLA} = 180°$ und (2) $\overline{\sphericalangle LAM} + \overline{\sphericalangle MBL} = 180°$.

<u>Aufgabe 10:</u> Beweise: $\overline{\sphericalangle CMF} = \overline{\sphericalangle BLA}$

<u>Tipp:</u> Verwende die obige Winkelbeziehung (1) und zeige, dass $\sphericalangle CMF$ auch Ergänzungswinkel zu 180° für $\sphericalangle AMB$ ist; hier geht entscheidend die Eigenschaft der Winkelhalbierenden im ΔABC ein.

....

Die Dreiecke: **ΔALB** und **ΔFMC** sind **ähnlich** (siehe Skizze auf der nächsten Seite).

Mit dieser Eigenschaft gilt: $$\frac{\overline{FC}}{r} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AL}}$$

Ebenso sind natürlich die Dreiecke: **ΔALK** und **ΔKDM** **ähnlich** (siehe Skizze auf der nächsten Seite).

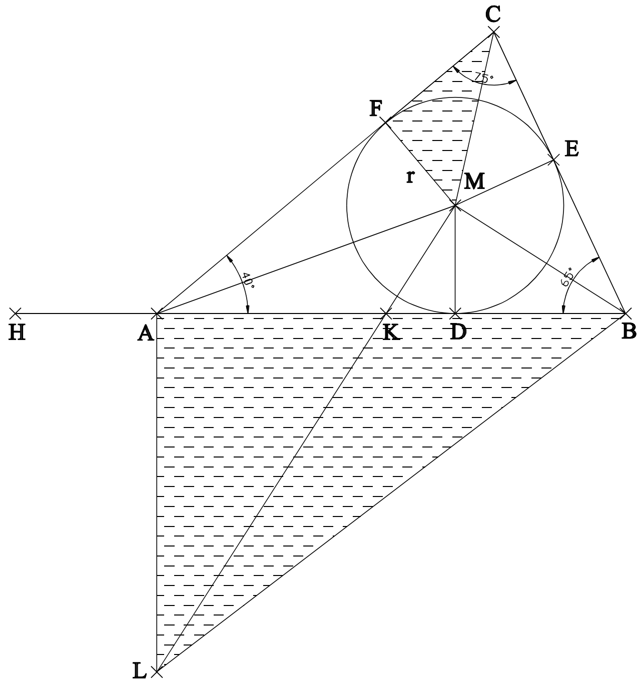
Womit weiterhin gilt: $$\frac{\overline{AL}}{r} = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}}$$

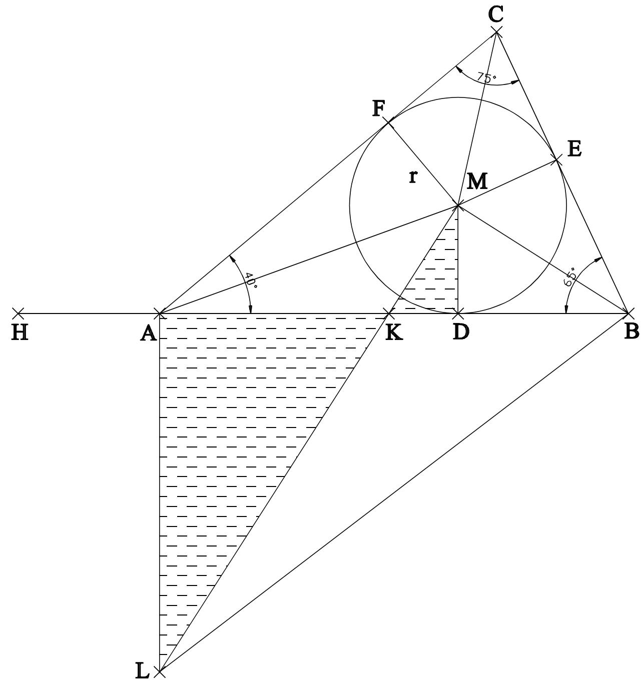
<u>Aufgabe 11:</u> Bestätige, dass gilt: $$\frac{\overline{AB}}{\overline{FC}} + 1 = \frac{\overline{AK}}{\overline{KD}} + 1 \Leftrightarrow \frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}}$$

---

[4] Was sagte noch einmal der Kehrsatz des Satzes des Thales?

Flächeninhalt ohne Höhen
die Dreieckformel von Heron (oder Archimedes?)





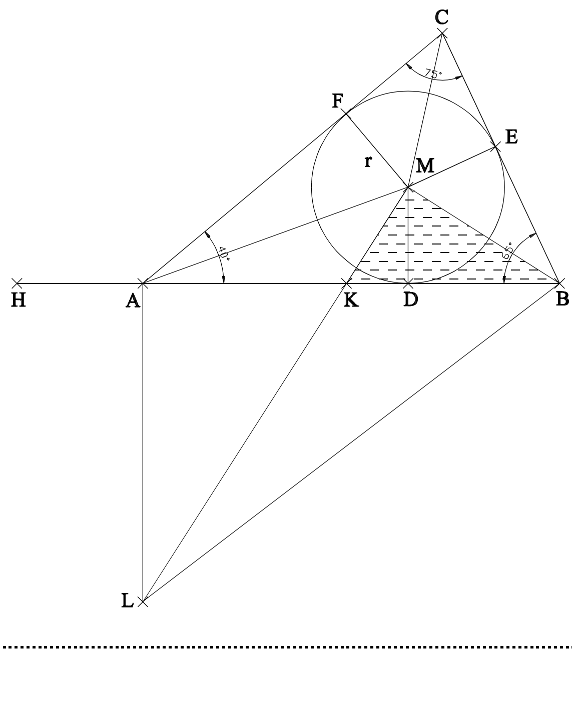
Wir sollten uns hier an alle vorherigen Beziehungen erinnern:

(1) $$\mathbf{A}_\Delta = \overline{HB} \cdot \overline{DM} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A}_\Delta^2 = \overline{HB}^2 \cdot \overline{DM}^2 = \overline{HB}^2 \cdot r^2$$

(2) $$\frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}}$$

(3) $$\overline{HA} = (s-c);\ \overline{AD} = (s-a);\ \overline{DB} = (s-b);\ \overline{HB} = s$$

Die Verbindung der Gleichungen (2) und (1) erfolgt nun über das Dreieck: ΔKBM:



<u>Aufgabe 12:</u> Begründe, dass gilt:

$$\overline{KD} \cdot \overline{DB} = r^2 = \overline{DM}^2$$

und dass damit aus der Beziehung (2) folgt:

(4) $$\frac{\overline{HB}^2}{\overline{HB} \cdot \overline{HA}} = \frac{\overline{AD} \cdot \overline{DB}}{r^2}$$

Flächeninhalt ohne Höhen
die Dreieckformel von Heron (oder Archimedes?)

Aufgabe 13: Bestätige durch Verbindung der Gleichungen (1) und (4) dass gilt:

$$\boxed{\mathbf{A_\Delta} = \sqrt{s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}}$$

☺

Aufgabe 14:

a) Es sei ein Dreieck durch folgende Maße gegeben: c = 10 cm, b = 7 cm, a = 5 cm. - Konstruiere dieses Dreieck, bestimme zeichnerisch das (ungefähre) Maß einer geeigneten Höhe und berechne den Flächeninhalt des Dreieckes, einmal unter Verwendung der Höhe, ein weiteres Mal unter Verwendung der Heronschen Formel.

b) Berechne den Flächeninhalt eines **gleichseitigen** Dreiecks mit der Seitenkante a = 6 cm, einmal unter vorheriger Berechnung der Höhe, einmal unter Verwendung der Heronschen Formel.

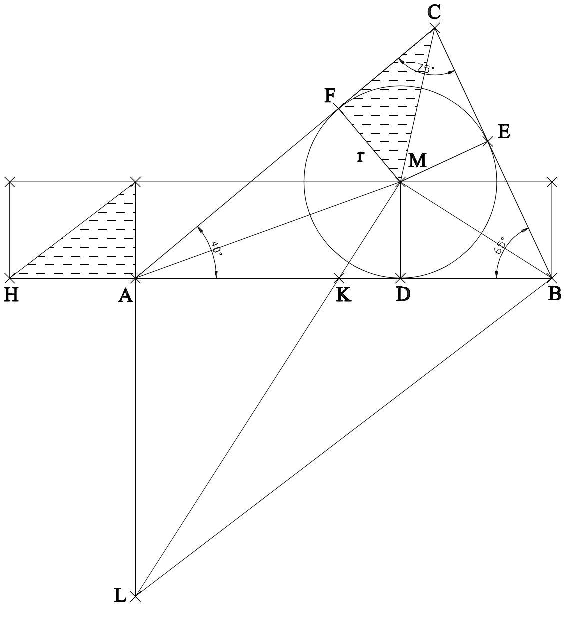
Eine Beweisalternative:[5] Wir knüpfen an die Beziehungen:

(1) $$\mathbf{A_\Delta} = \overline{HB}\cdot\overline{DM} \Leftrightarrow \mathbf{A_\Delta^2} = \overline{HB}^2\cdot\overline{DM}^2 = \overline{HB}^2\cdot r^2$$

(2) $$\frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}}$$

(3) $$\overline{HA} = (s-c);\ \overline{AD} = (s-a);\ \overline{DB} = (s-b);\ \overline{HB} = s$$ an.

Aufgabe 15:



a) Beweise unter Verwendung der nebenstehenden Skizze, dass gilt:

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}} = \frac{\overline{AL}+r}{r}$$

Tipp: $r = \overline{MD}$ taucht auch in der Verlängerung der Strecke AL auf.

b) Kennzeichne in der nebenstehenden Skizze begründet, wo überall Winkel der Größen $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\beta}{2}$, $\frac{\gamma}{2}$ auftauchen.

[5] von Dr. Leo Bocek, Karls-Universität Prag

c) Da die schraffierten Dreiecke ähnlich sind, gilt:

$$\frac{\overline{AL} + r}{\overline{AD}} = \frac{\overline{DB}}{r}$$

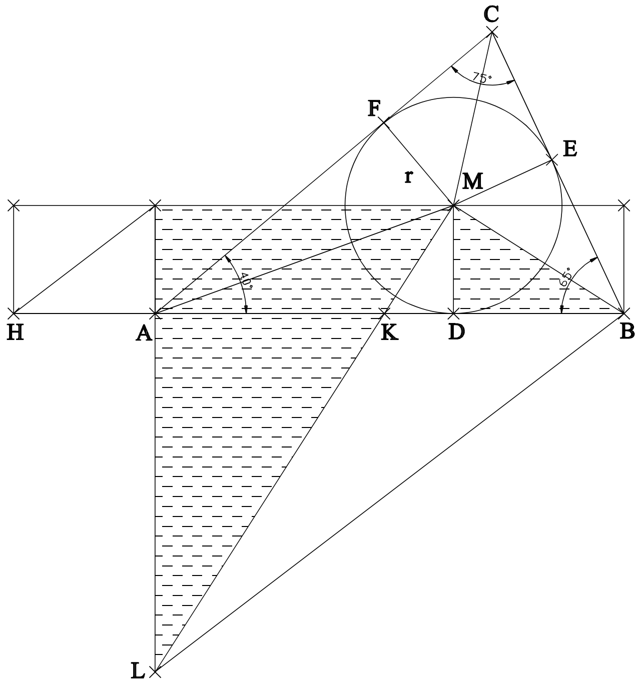
Begründe die obige Beziehung und zeige, dass sich unter Verwendung von a) ergibt:

$$\overline{HB} \cdot r^2 = \overline{HA} \cdot \overline{AD} \cdot \overline{DB}$$

Setze nun in (1) ein und zeige:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\Delta}^{2} = s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$$

Wer findet noch einen weiteren Beweis?



Nachtrag für besonders Interessierte:

Es liegt die Frage nahe, ob es auch eine solche Formel für den Flächeninhalt eines Viereckes gibt. Tatsächlich wird wiederum Heron von Alexandria die folgende Formel zugeschrieben, die für **Sehnen**vierecke eines Kreises gilt bzw für Vierecke, die einen Außenkreis besitzen (s ist wiederum die halbe Umfangslänge):

$$\boxed{\mathbf{A}_{\square} = \sqrt{(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c) \cdot (s-d)}}$$

Da die Herleitung etwas aufwendig ist, gehört dies nicht unbedingt zum Schulstoff[6]. Dennoch kann man ja die Beziehung am Beispiel bestätigen.

Also wer möchte: Kreis zeichnen - Sehnenviereck einzeichnen - Sehnenviereck durch die Diagonale in 2 Dreiecke “zerlegen” - Sehnen und Diagonale messen - den Flächeninhalt der 2 Dreiecke (näherungsweise) bestimmen (Heronsche Dreiecksformel) - Flächeninhalte der Dreiecke addieren - Heronsche Vierecksformel zur Flächeninhaltsbestimmung des Sehnenvierecks anwenden - vergleichen!

---

[6] Bekannt ist diese Beziehung unter dem Namen: „Formel von Brahmagupta“ (Klassenstufe 10)

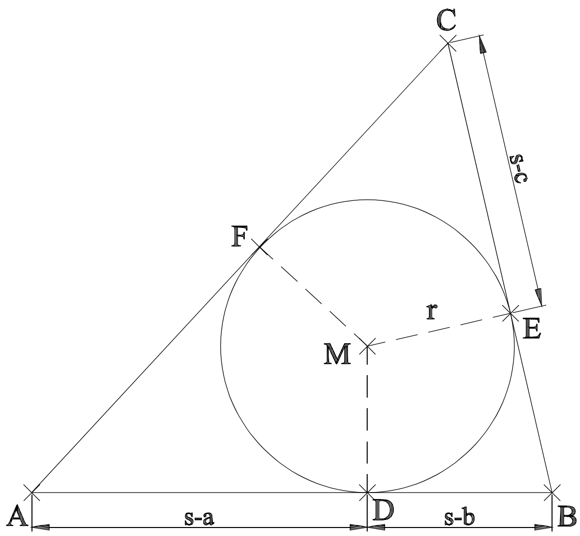
Eine weitere Beweisalternative:[7]

Aufgabe 16:

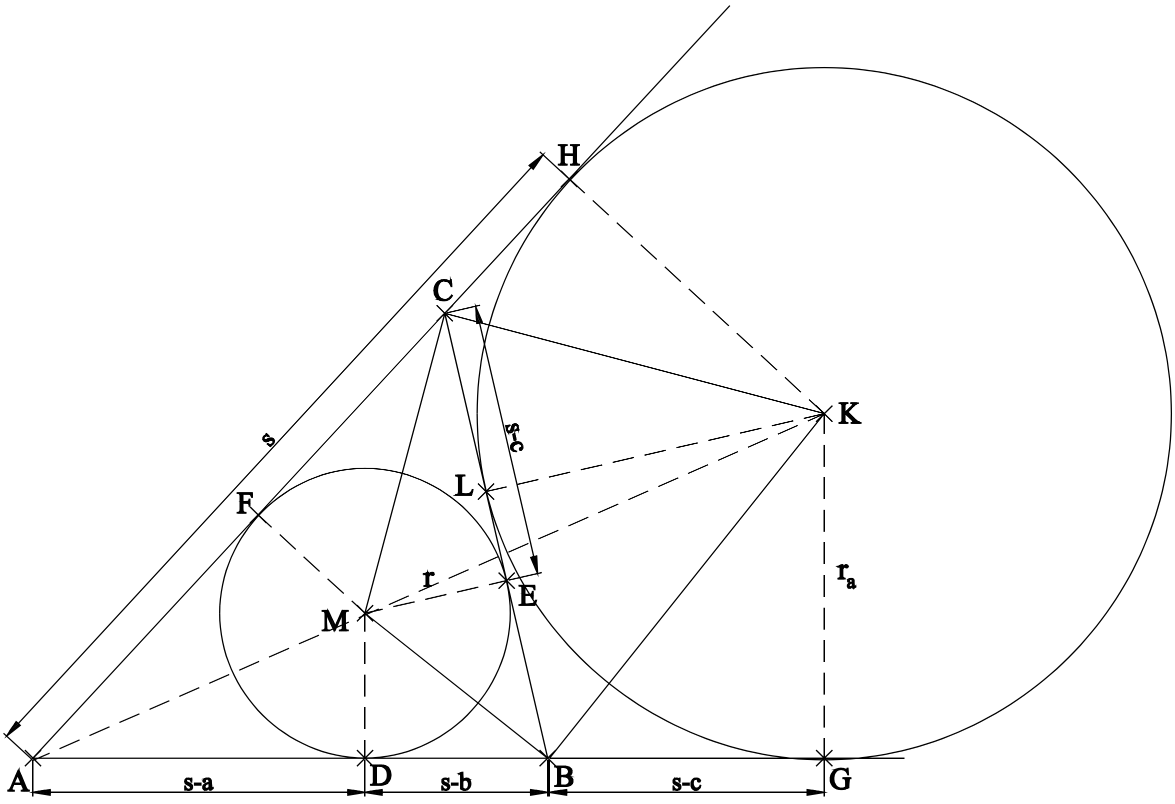
a) Begründe unter Verwendung der nebenstehenden Skizze, dass gilt:

$$\overline{AD} = \overline{AF} = s-a$$
$$\wedge\ \overline{DB} = \overline{BE} = s-b$$
$$\wedge\ \overline{FC} = \overline{CE} = s-c$$

und natürlich: $\mathbf{A}_\Delta = s \cdot r$.



b) Eine Ankreisfigur mit einigen noch unbewiesenen Bezeichnungen:



Begründe:

$$\mathbf{A}_\Delta = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}\cdot r_a + \frac{1}{2}\cdot\overline{AC}\cdot r_a - \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot r_a$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\overline{AB} + \frac{1}{2}\cdot\overline{AC} + \frac{1}{2}\cdot\overline{BC} - \overline{BC}\right)\cdot r_a = (s-a)\cdot r_a$$

$$\boxed{\mathbf{A}_\Delta^2 = s\cdot(s-a)\cdot r\cdot r_a}$$

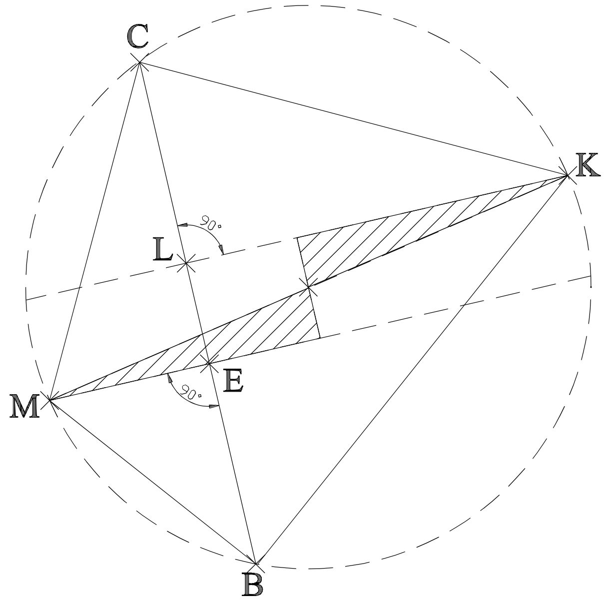
[7] Quelle: http://www.agutie.com (Antonio Gutierrez)

Es gilt weiterhin: $\overline{AH} = \overline{AG} = s \;\wedge\; \overline{BG} = s - c$

Nun, dass die Strecken AH und AG gleich lang sind ist leicht zu begründen, aber für das weitere müssen wir noch einige Überlegungen anstellen.

Dazu die nebenstehende Teilskizze, die bei der Argumentation helfen könnte. Begründe die folgenden Teilaussagen:

– □BKCM ist ein Sehnenviereck.
– MK ist ein Durchmesser des Umkreises des Sehnenvierecks.
– CL und EB sind gleich lang.
– CE und LB sind gleich lang.



Und nun zurück zur Gesamtskizze:

– $\overline{LB} = \overline{BG} = s - c$
– $\overline{CH} = s - b$

c) Die Dreiecke ΔDBM und ΔBGK sind ähnlich (Begründung?), womit gilt:

$$\frac{r}{(s-b)} = \frac{(s-c)}{r_a} \quad\Rightarrow\quad r \cdot r_a = (s-b)\cdot(s-c)$$

und damit: $\boxed{A_\Delta^2 = s\cdot(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}$