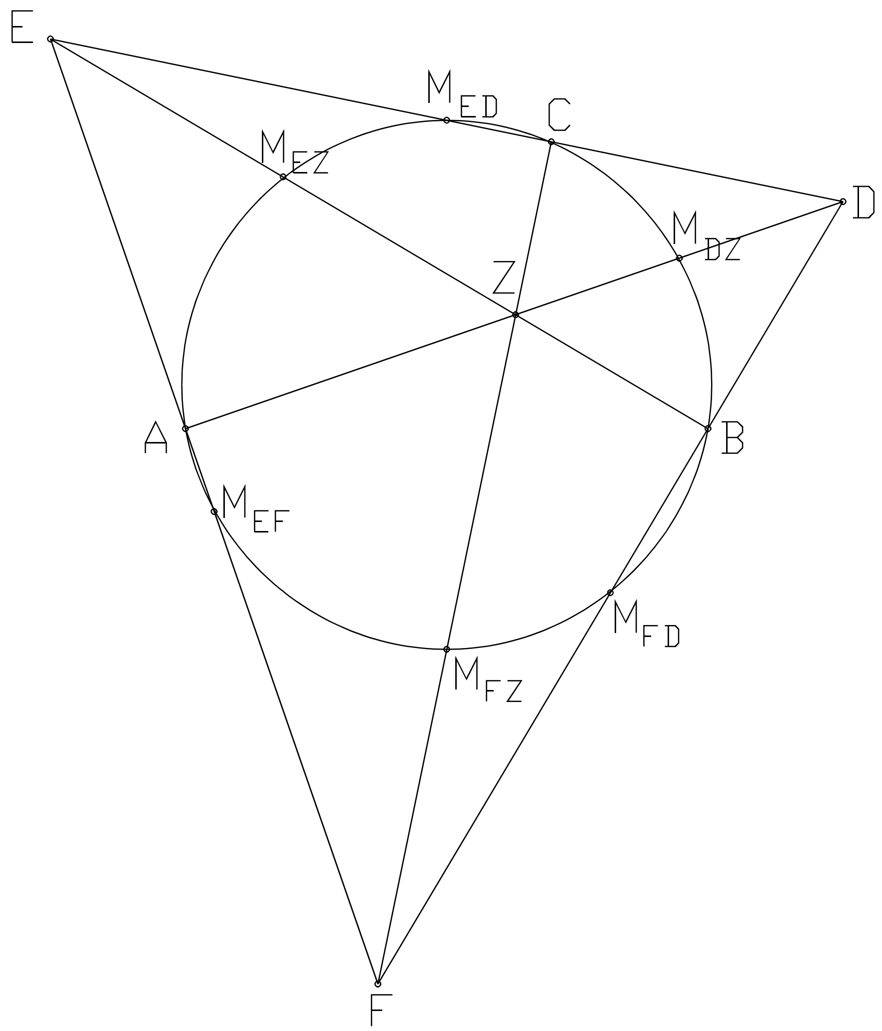
Der Feuerbachkreis

... oder: Ein Kreispunkt kommt selten allein

Ein Dreieck und ein Kreis, auf dem **9** Punkte liegen. Was sind das denn für besondere Punkte?[1]



<u>Der Satz über den 9-Punkte-Kreis:</u>

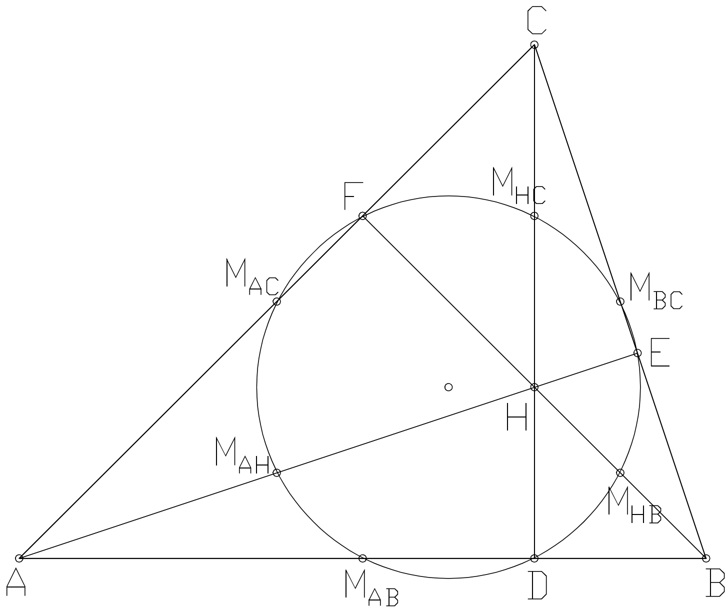
Im Dreieck ΔDEF gilt: Die 3 Seitenmittelpunkte, die 3 Lotfußpunkte der Höhen, sowie die 3 Mittelpunkte der Strecken von den Eckpunkten zum Höhenschnittpunkt liegen auf einem Kreis.

1) Untersuche mit 2 selbst konstruierten Dreiecken, einem spitzwinkligen und einem stumpfwinkligen Dreieck, ob dieser Satz vermutlich für jedes Dreieck gilt.

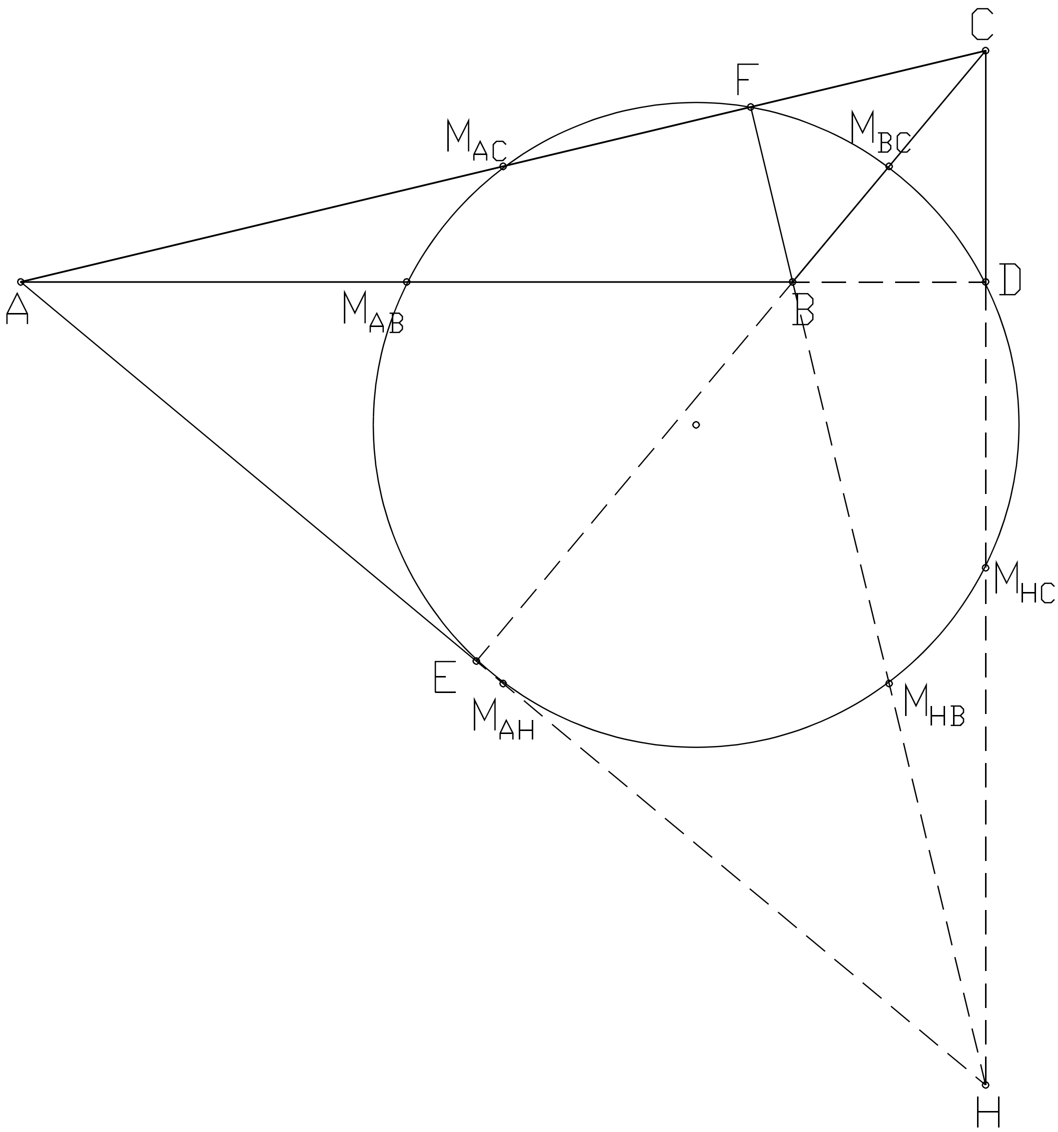
2) Untersuche die Figur auf Besonderheiten, z.B. Winkelgrößen, Streckenlängen, Vierecksformen, etc. Versuche dich dabei an bekannte geometrische Sätze bzw. Aussagen zu erinnern. Überprüfe gegebenenfalls deine Behauptungen an weiteren, beispielhaften Konstruktionen.

[1] Karl Wilhelm **Feuerbach**; ✳ 30.05.1800 in Jena, ✝ 12.03.1834 in Erlangen.

Zu Aufgabe 1:

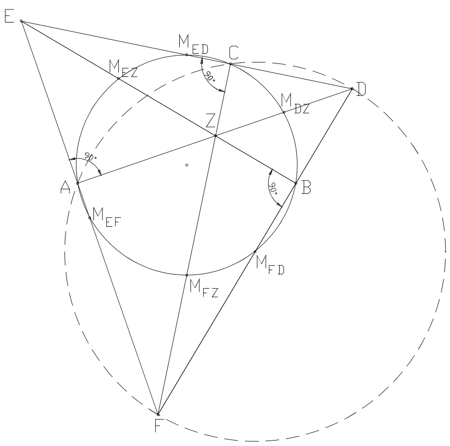


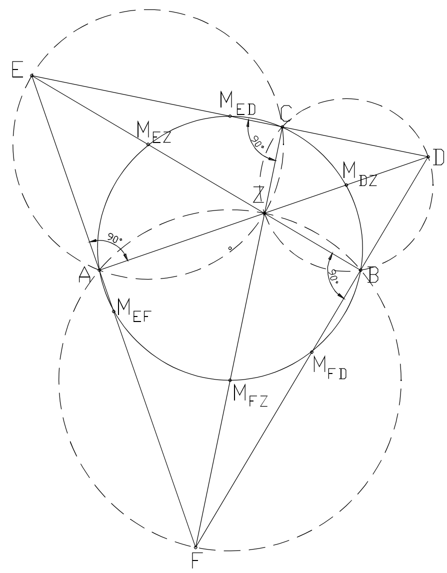
C
F
M_{HC}
M_{AC}
M_{BC}
E
H
M_{AH}
M_{HB}
A
M_{AB}
D
B

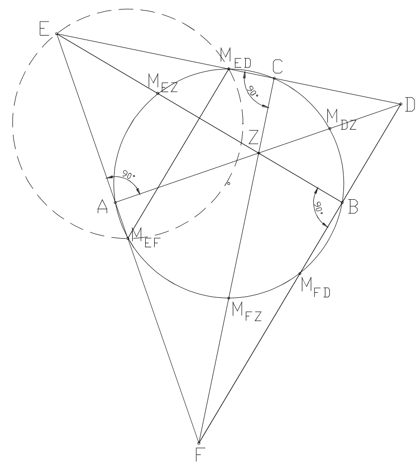


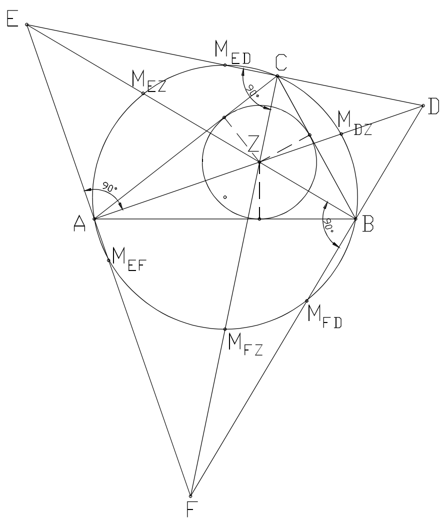
C
F
M_{AC}
M_{BC}
A
M_{AB}
B
D
M_{HC}
E
M_{AH}
M_{HB}
H

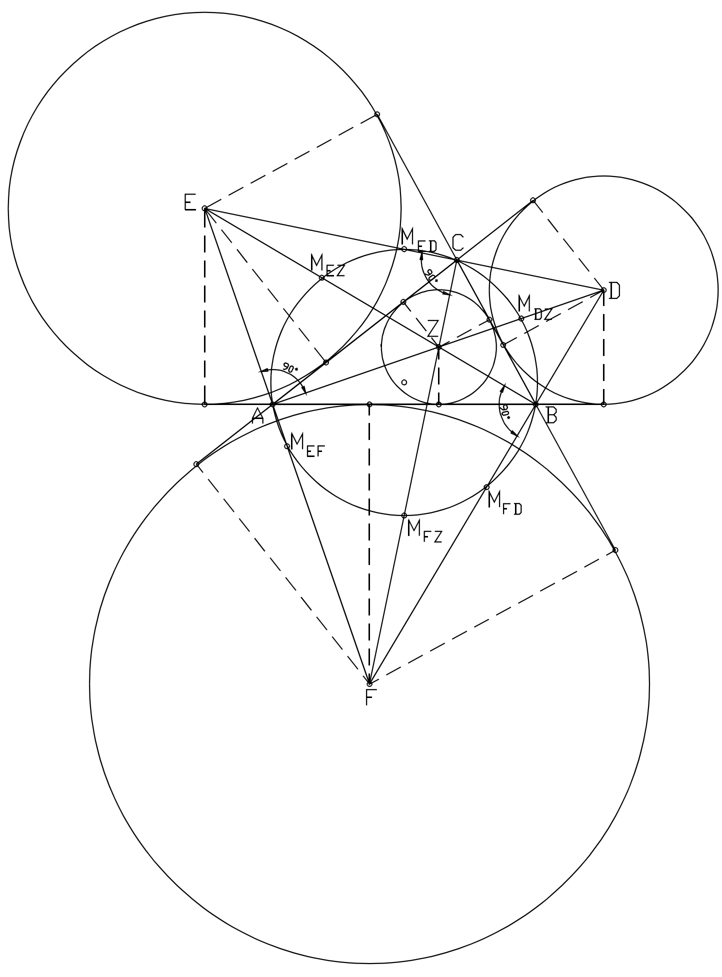
3) Aus den unteren Darstellungen sind wichtige Beziehungen ableitbar. - Ergänze die Konstruktionen gegebenenfalls mit geeigneten Bezeichnungen und begründe die entdeckten Sachverhalte.



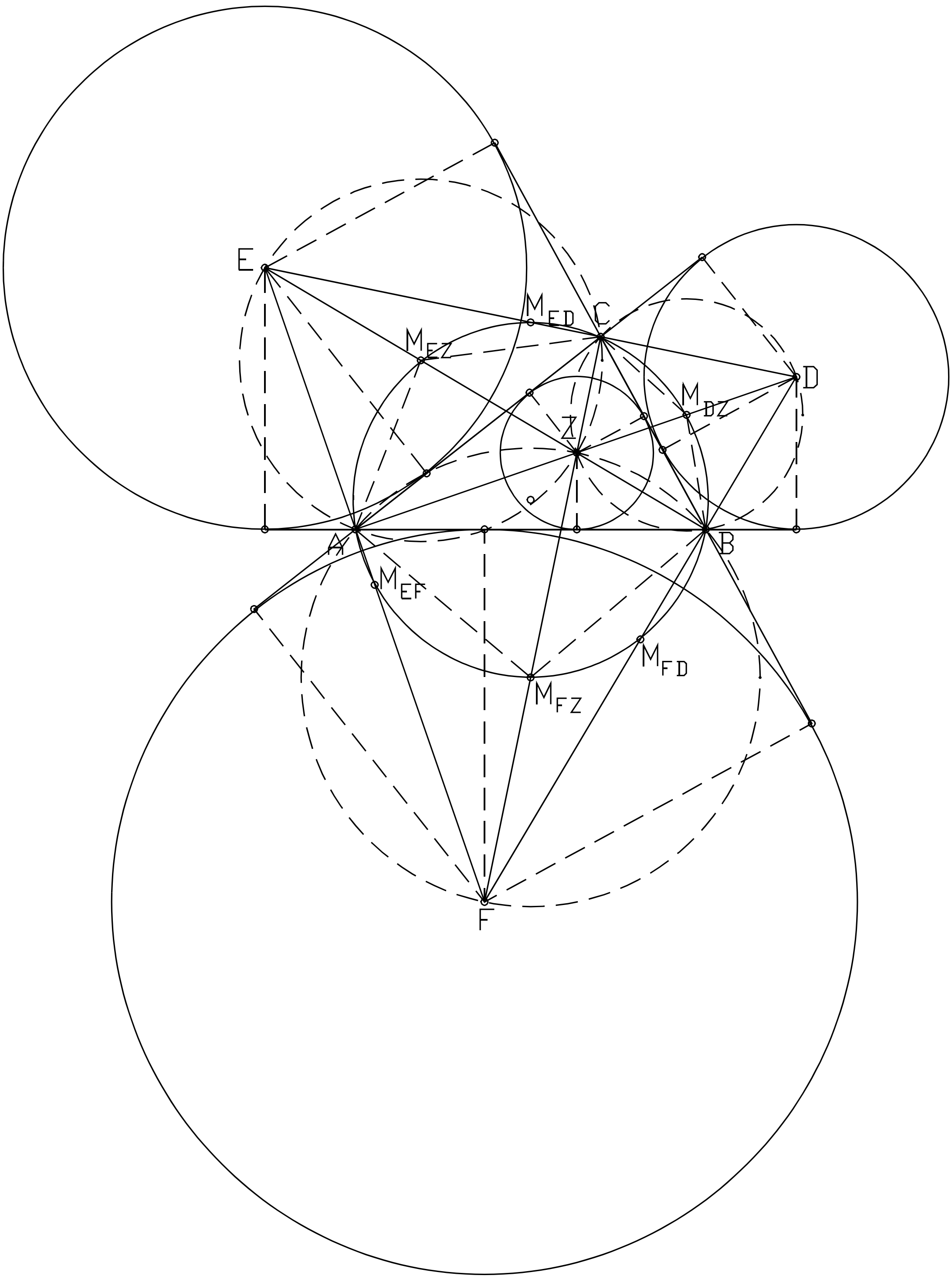








Noch mehr Hilfslinien:



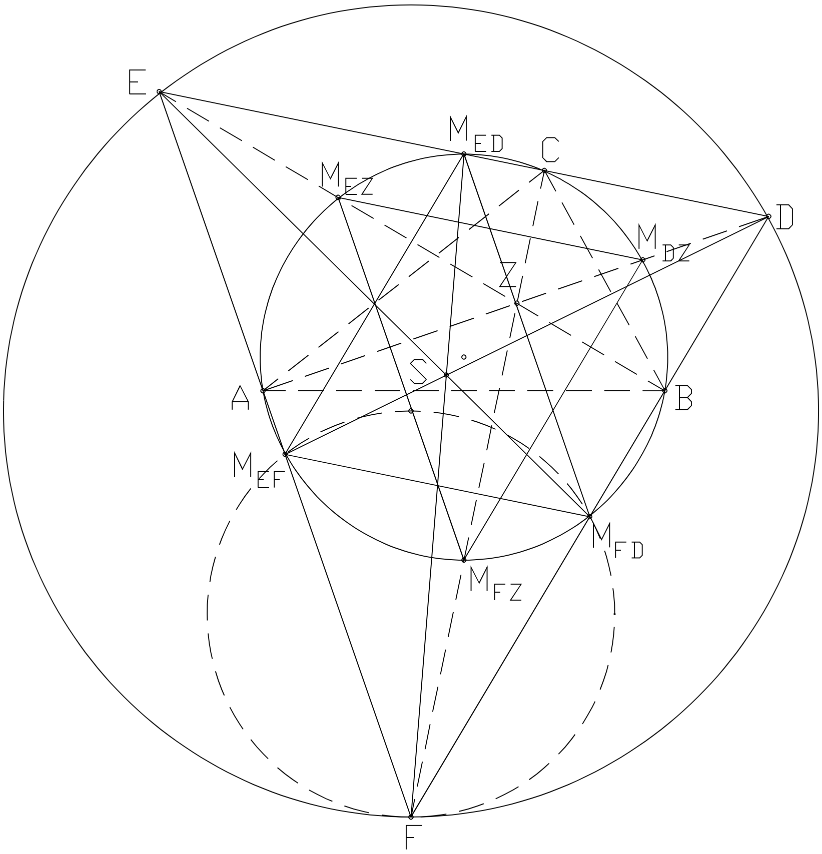
4) Nun sollte der Beweis des Satzes gelingen! - Die Vierecke □DCZB, □EAZC und □FBZA sind Sehnenvierecke mit zwei rechten Winkeln, die Höhen des Dreiecks ΔDEF sind Winkelhalbierende des Dreiecks, gebildet aus den Höhenfußpunkten (ΔABC), auch die Vierecke □ABCM_{EZ}[2], □AM_{FZ}BC und □ABM_{DZ}C sind Sehnenvierecke, ...

[2] Tipp: Zeige z.B., der Winkels ∢AM_{EZ}C hat mit β zusammen das Maß von 180° , weil er doppelt so groß ist wie der Winkel ∢AEC (Umfangswinkelsatz).

Der Feuerbachkreis

... oder: Ein Kreispunkt kommt selten allein

Falls dir noch eine Idee fehlen sollte zu begründen, warum nicht nur die Mittelpunkte der oberen Höhenabschnitte des Dreiecks ΔDEF auf dem Umkreis des Dreiecks ΔABC der Lotfußpunkte liegen, sondern auch noch die Mittelpunkte der Dreiecksseiten, so gibt dir vielleich noch die folgende Skizze eine Idee:



Was passiert eigentlich, wenn man das Dreieck ΔDEF (mit seinem Umkreis) am Schnittpunkt **S** der Seitenhalbierenden zentrisch streckt (k = - 0,5) ?
Was ergibt sich dann, wenn man das Dreieck ΔDEF (mit seinem Umkreis) am Schnittpunkt **Z** der Höhen zentrisch streckt (k = + 0,5) ? - Probiere es aus!

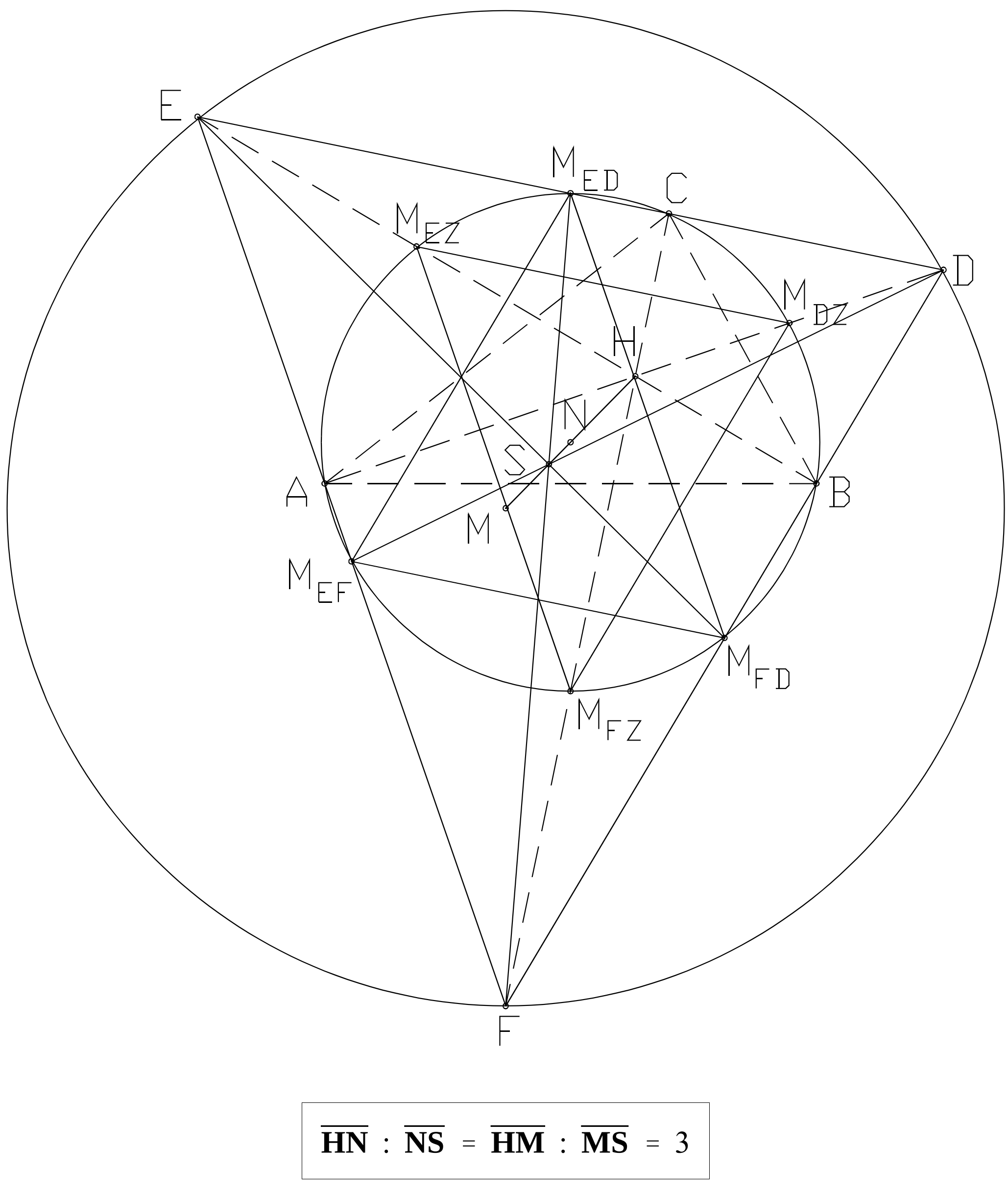
Alternative: Wenn man die Geraden durch die Mittelparallelen (z.B. g(M_{EF} ; M_{FD})) als Spiegelachsen auffasst und die Eckpunkte des Dreiecks ΔDEF (z.B. F) und den jeweiligen Umkreis (mit der Mittelparallelen als Sehne und durch den zugehörigen Eckpunkt verlaufend) an der jeweiligen Spiegelachse spiegelt, was sind die Bilder der Eckpunkte und der Umkreise?

<u>Nachtrag für Interessierte:</u>

Gibt es eigentlich einen besonderen Zusammenhang der Lage des Mittelpunktes **N** des Neunpunktekreises zu den 3 Punkten: **H** (Schnittpunkt der Höhen), **S** (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden), **M** (Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) eines Dreiecks, die bekanntlich auf einer Geraden, der Eulerschen Geraden liegen und für die gilt:

$$\overline{\mathbf{HS}} = 2 \cdot \overline{\mathbf{SM}} \qquad \text{(Beweis?)}$$

Könnte es sein, dass die **vier** Punkte: **M**, **S**, **N** und **H** ein harmonisches Punktquadrupel bilden?



Es gilt: $\boxed{\overline{\mathbf{HN}} : \overline{\mathbf{NS}} = \overline{\mathbf{HM}} : \overline{\mathbf{MS}} = 3}$

Der Feuerbachkreis

... oder: Ein Kreispunkt kommt selten allein

Lösungsskizze zu 4) (falls der Tipp nicht hinreichend war):

$$\square EAZC \text{ ist Sehnenviereck} \Rightarrow \overline{\sphericalangle CZA} + \overline{\sphericalangle AEC} = 180°$$

$$\text{Winkelsummensatz } \Delta AZC \Rightarrow \overline{\sphericalangle CZA} = 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Umfangswinkelsatz über Sehne } AC \Rightarrow \overline{\sphericalangle AEC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\sphericalangle AM_{EZ}C}$$

$$\text{eingesetzt ergibt sich: } 180° - \frac{\gamma}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \cdot \overline{\sphericalangle AM_{EZ}C} = 180°$$

$$\text{Winkelsummensatz } \Delta ABC \Rightarrow \overline{\sphericalangle AM_{EZ}C} = 180° - \beta$$

Damit ist das Viereck $\square ABCM_{EZ}$ ein Sehnenviereck, und somit liegt M_{EZ} auf dem Außenkreis von ΔABC.

Entsprechend zeigt man:
$\square ABM_{DZ}C$ ist ein Sehnenviereck, und somit liegt M_{DZ} auf dem Außenkreis von ΔABC.
$\square AM_{FZ}BC$ ist ein Sehnenviereck, und somit liegt M_{FZ} auf dem Außenkreis von ΔABC.

Also liegen die Punkte: A, B, C, M_{EZ}, M_{DZ} und M_{FZ} auf einem Kreis, dem Außenkreis des Dreiecks ΔABC, wobei A, B, C die Höhenfußpunkte des Dreiecks ΔDEF sind.

Der Rest über die Alternative:

Um noch zu zeigen, dass auch die Mittelpunkte M_{ED}, M_{EF} und M_{FD} mit den Punkten A, B, C auf einem Kreis liegen betrachtet man z.B. den Umkreis des Dreiecks $\Delta FM_{FD}M_{EF}$ und die Gerade g(M_{EF} ; M_{FD}) als Spiegelachse. Aus der Eigenschaft einer Mittelparallelen im Dreieck ΔDEF und der Eigenschaft einer Höhe (FC) folgt, dass C der Spiegelpunkt von F und der Umkreis des Dreiecks $\Delta M_{FD}CM_{EF}$ Spiegelkreis des Dreiecks $\Delta FM_{FD}M_{EF}$ ist.
Entsprechende Argumentation mit den anderen beiden Mittelparallelen führt dazu, dass die 3 Umkreise der Dreiecke: $\Delta FM_{FD}M_{EF}$, $\Delta DM_{ED}M_{FD}$ und $\Delta EM_{EF}M_{ED}$ als Spiegelkreis den identischen Umkreis des Dreiecks ΔABC besitzen ($F \rightarrow C$, $E \rightarrow B$, $D \rightarrow A$).