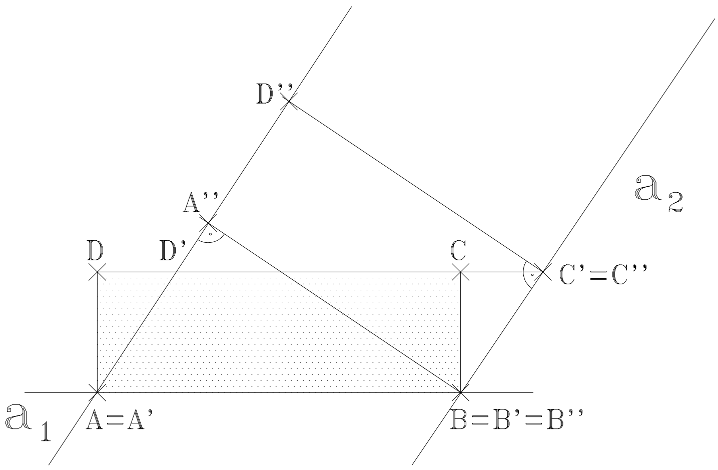
Flächenverwandlung von Rechtecken

Durch die Hintereinanderausführung zweier Scherungen, zuerst an der Scherungsachse **a_1**, danach an der Scherungsachse **a_2**, wird ein Rechteck **□ABCD** in ein neues Rechteck **□A''B''C''D''** übergeführt.



Gib Näherungswerte folgender Maße an:

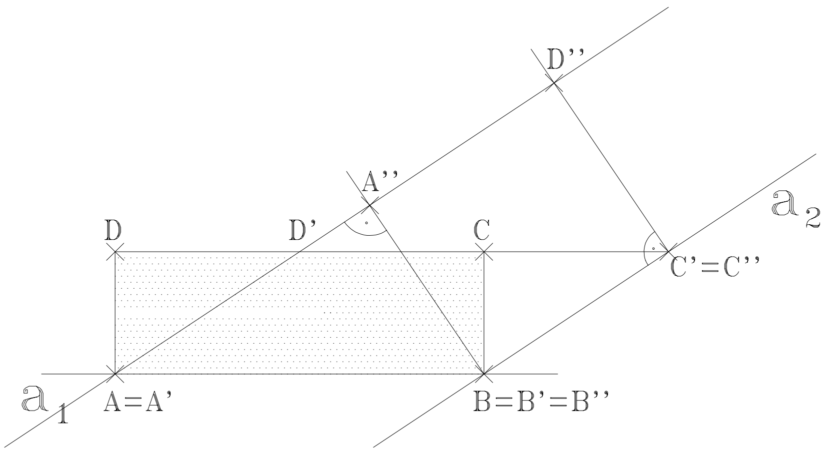
$\overline{AB}$ = $\overline{AD}$ =

$\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ =

$\overline{A''B''}$ = $\overline{A''D''}$ =

$\overline{A''B''} \cdot \overline{A''D''}$ =

Die Scherungsachse **a_2** ist nun gegenüber der Scherungsachse **a_1** stärker geneigt!



Gib wieder die folgenden Maße an:

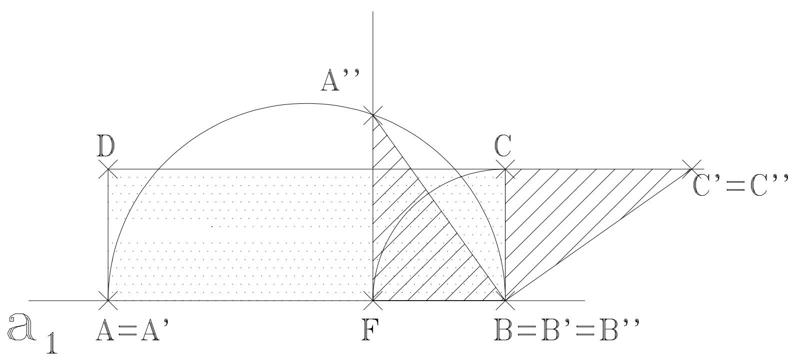
$\overline{AB}$ = $\overline{AD}$ =

$\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ =

$\overline{A''B''}$ = $\overline{A''D''}$ =

$\overline{A''B''} \cdot \overline{A''D''}$ =

Offensichtlich sind Länge und Breite des Bildrechtecks **□A''B''C''D''** abhängig von der Neigung der Scherungsachse **a_2** gegenüber der Scherungsachse **a_1** ! - Wie muß die Scherungsachse **a_2** verlaufen, damit das Bildrechteck **□A''B''C''D''** ein Quadrat ist ?

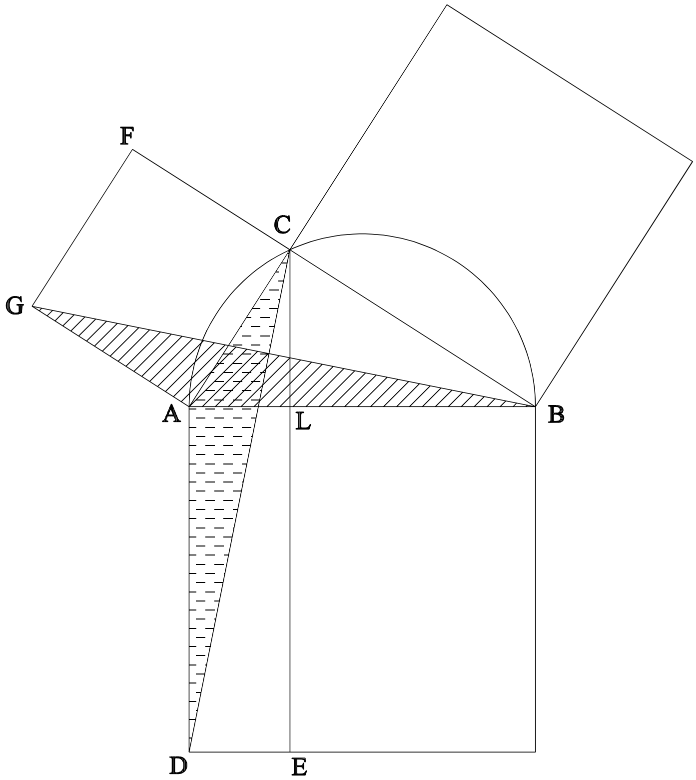


Zeichne die Scherungsachse **a_2** ein, sowie eine Parallele zu **a_2** durch den Punkt **A** !
Wie wurde der eingezeichnete Punkt **A''** konstruiert ? - Welche Voraussetzungen und geometrischen Sätze wurden verwendet?
Wie findet man danach den Punkt **C''** ?

Gib aus der Kenntnis von $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ die Streckenlänge $\overline{A''B''}$ an !

Flächenverwandlung von Rechtecken

Der “klassische” Beweis des Kathetensatzes des Euklid:[1]



1) Begründe mit Kongruenzsätzen, dass die Dreiecke:

$$\Delta ABG \quad \text{und } \Delta ADC$$

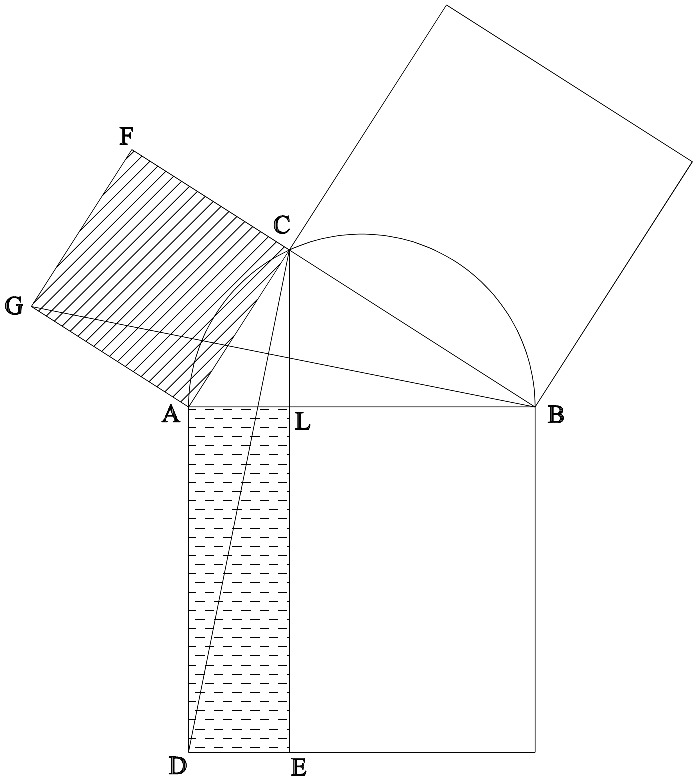
kongruent und damit flächeninhaltsgleich sind.

2) Begründe:

- Der Flächeninhalt des Dreieckes ΔADC ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Rechteckes □ADEL.
  Tipp: Nimm als Grundseite des Dreieckes die Seite AD; was ist die Höhe?

- Der Flächeninhalt des Dreieckes ΔABG ist halb so groß wie der Flächeninhalt des Quadrates □ACFG.
  Tipp: Nimm als Grundseite des Dreieckes die Seite AG; was ist die Höhe?

3) Da die Flächeninhalte der Dreiecke nach (1) gleich sind, diese wiederum nach (2) die Hälfte der Flächeninhalte der gekennzeichneten Vierecke sind, so sind auch die Vierecke flächeninhaltsgleich.



Im rechtwinkligen Dreieck gilt:

$$\left(\overline{AC}\right)^2 = \overline{AB} \cdot \overline{AL}$$

wobei L der Fußpunkt des Lotes von C auf AB ist.

---

4) Wo wurde bei dem Beweis eigentlich verwendet, dass das Dreieck rechtwinklig ist?

5) Woraus wird in den beiden Skizzen eigentlich erkennbar, dass das Dreieck rechtwinklig ist? - Das kann ja jeder behaupten!

---

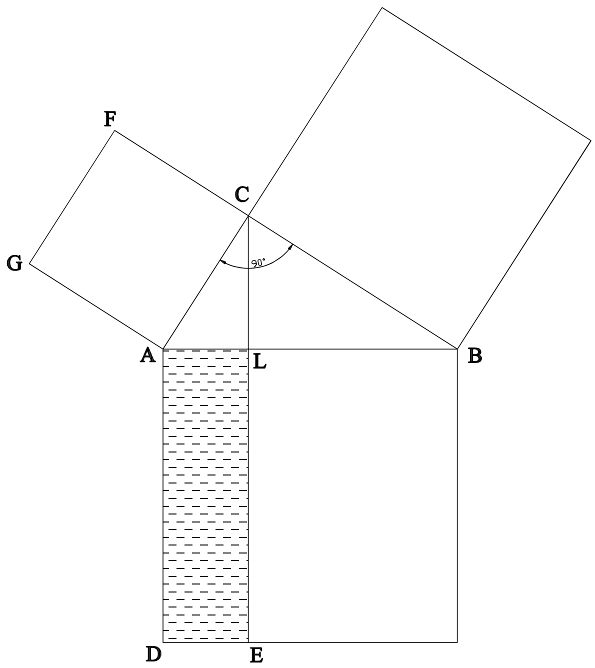
1 “Elemente” des Euklid von Alexandria

Flächenverwandlung von Rechtecken

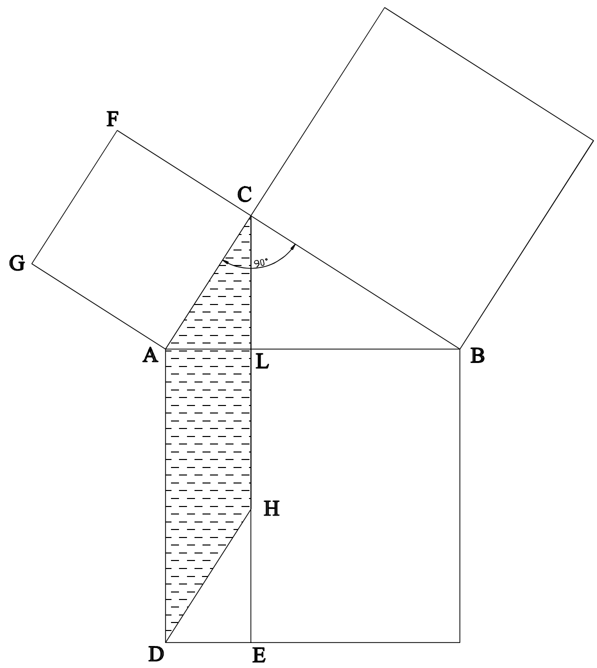
Die untere Bildfolge skizziert einen weiteren Beweis des Kathetensatzes des Euklid, die auf den geometrischen Abbildungen: ‘Scherung’ und ‘Drehung’ beruht.

6) Kommentiere und begründe die einzelnen Schritte des Beweises. Nimm insbesondere zu der Frage Stellung: Wo wird verwendet, dass das Dreieck ΔABC rechtwinklig ist.

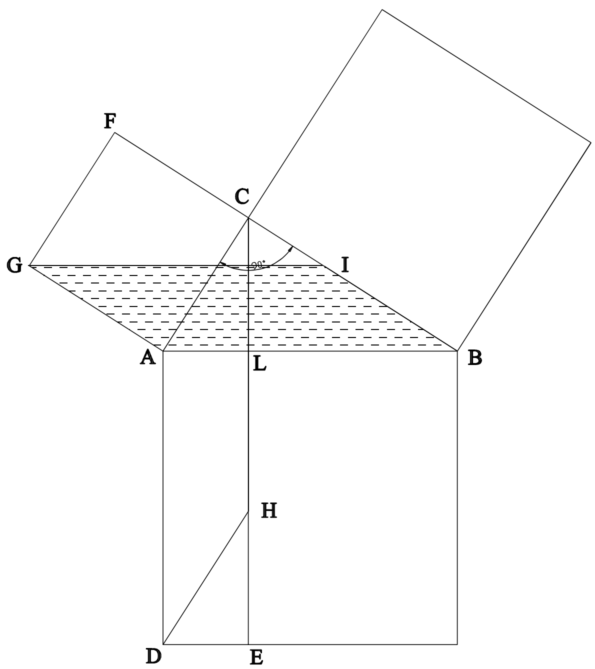
a)



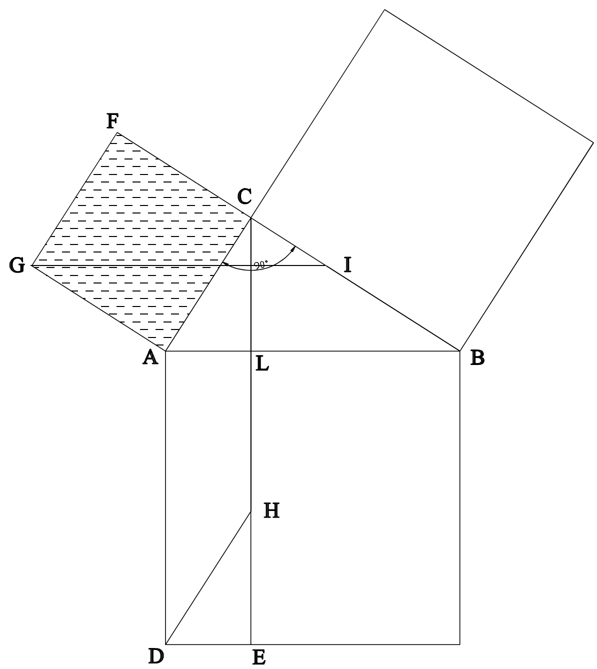
b)



c)



d)



7) Konstruiere nach dem Kathetensatz des Euklid eine (inkommensurable) Strecke der Länge $\sqrt{15}$.

Flächenverwandlung von Rechtecken

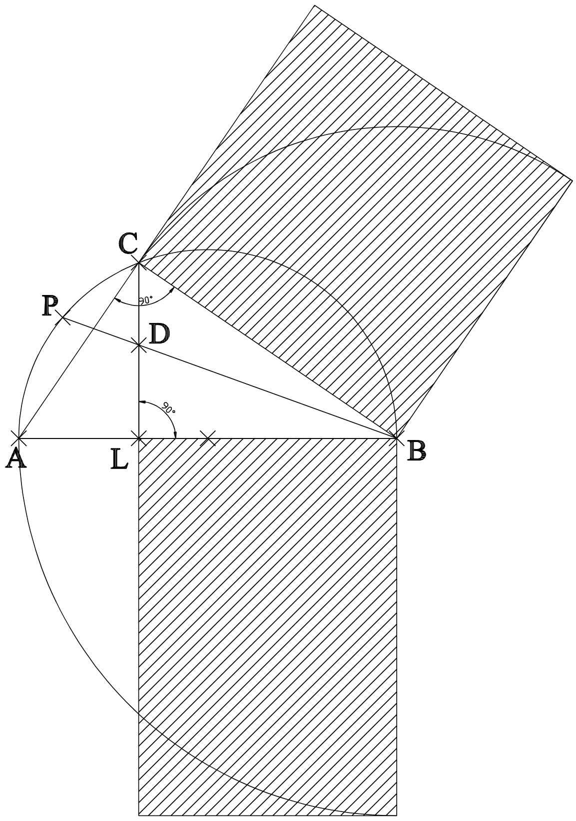
In der nebenstehenden Skizze ist noch einmal der Sachverhalt des Kathetensatzes des Euklid dargestellt. Es gilt:

$$\boxed{\overline{BC}^{\,2} = \overline{AB} \cdot \overline{LB}}$$

Auf dem Kreisbogen zwischen den Punkten A und C wurde ein beliebiger Punkt P gewählt. Die Strecke PB schneidet die Höhe CL des rechtwinkligen Dreiecks ΔABC im Punkt D.

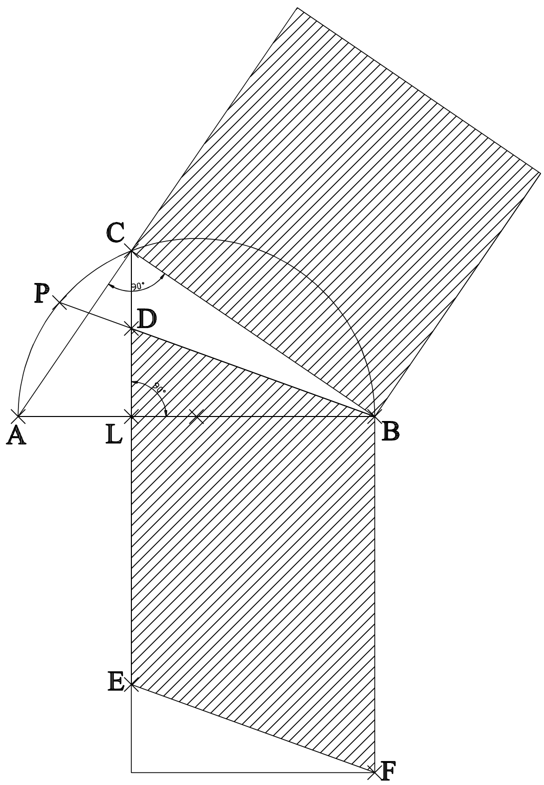
(Man kann sich vorstellen, dass die ‚veränderliche' Strecke AB um das Zentrum B gedreht wird, A wandert auf dem Kreisbogen (in P), L auf der Höhe (in D); die Länge von AB wird dabei kleiner (in PB), die Länge von LB wird dabei größer (in DB). Könnte es sein, dass ..... ?)

Führe geeignete Messungen und Vergleiche durch!

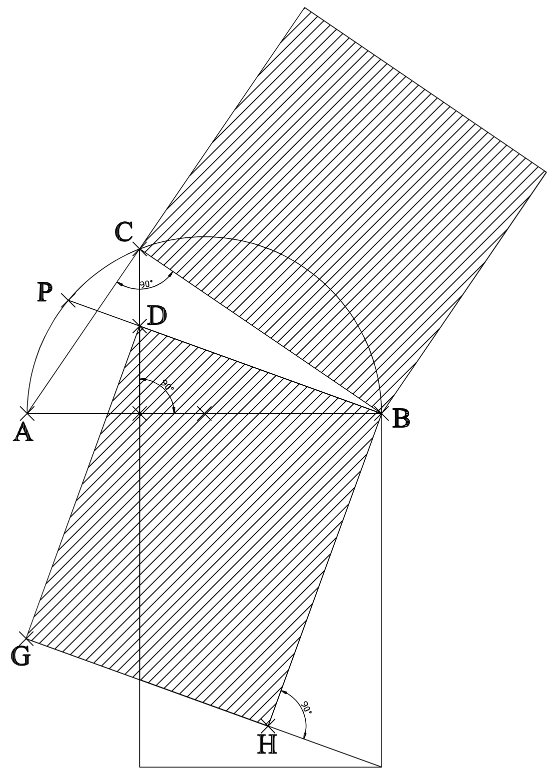


8) Analysiere die unten stehende Bildfolge, bestehend aus vier Graphiken, und formuliere eine Behauptung, die man als eine Verallgemeinerung des Kathetensatzes auffassen könnte. Beweise danach diese Behauptung.

a)

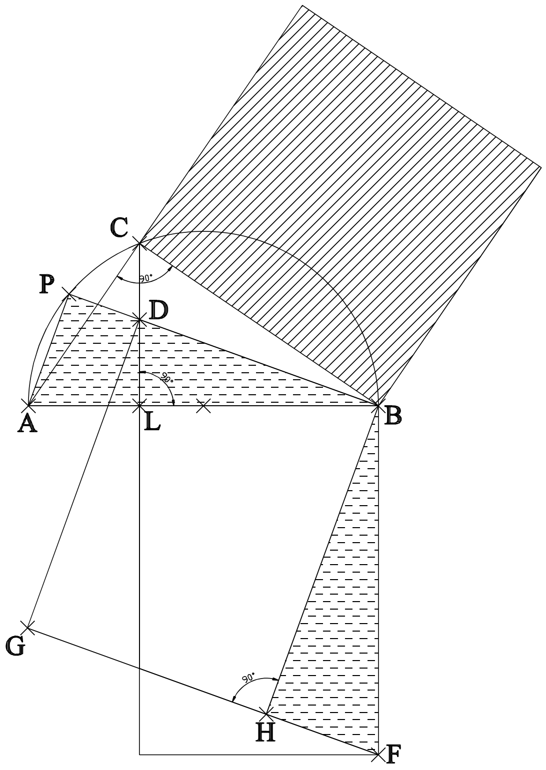


b)

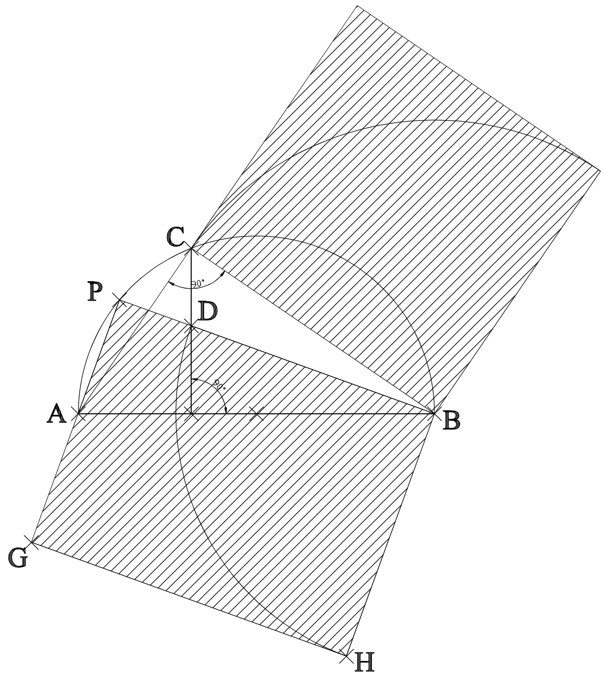


Flächenverwandlung von Rechtecken

c)



d)



Behauptung:.[2] $\overline{PB} \cdot \overline{DB} =$

Beweis:

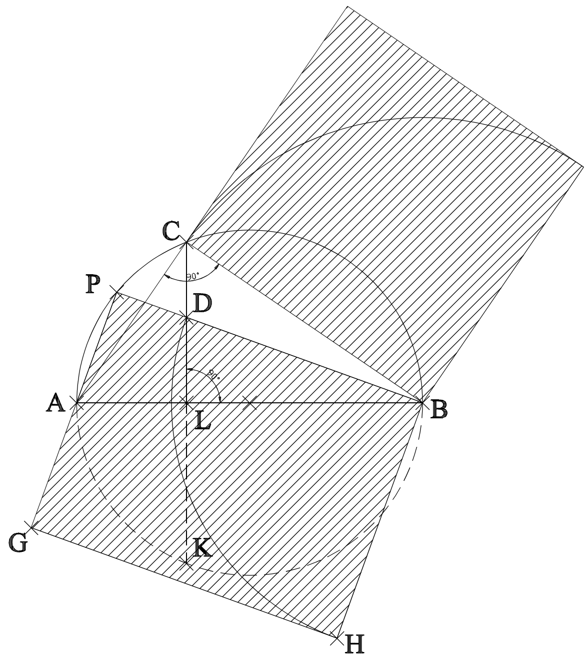
[2] Quelle: B. Artmann, W. Kroll, G. Pickert: Eine Verallgemeinerung des Kathetensatzes des Euklid; PM 3/45 Jg. 2003

Flächenverwandlung von Rechtecken

<u>Nachtrag:</u> Steht unterrichtlich schon die Ähnlichkeitslehre zur Verfügung, so kann die Verallgemeinerung des Kathetensatzes auch mit anderen Methoden bewiesen werden.

a) (Sehnensatz und Satz des Pythagoras) Es gilt:

$$\begin{aligned}\overline{PD}\cdot\overline{DB} &= \overline{CD}\cdot\overline{DK}\\ &= \left(\overline{CL}-\overline{DL}\right)\cdot\left(\overline{LK}+\overline{DL}\right)\\ &= \left(\overline{CL}-\overline{DL}\right)\cdot\left(\overline{CL}+\overline{DL}\right)\\ &= \overline{CL}^2-\overline{DL}^2\end{aligned}$$



Damit ergibt sich:

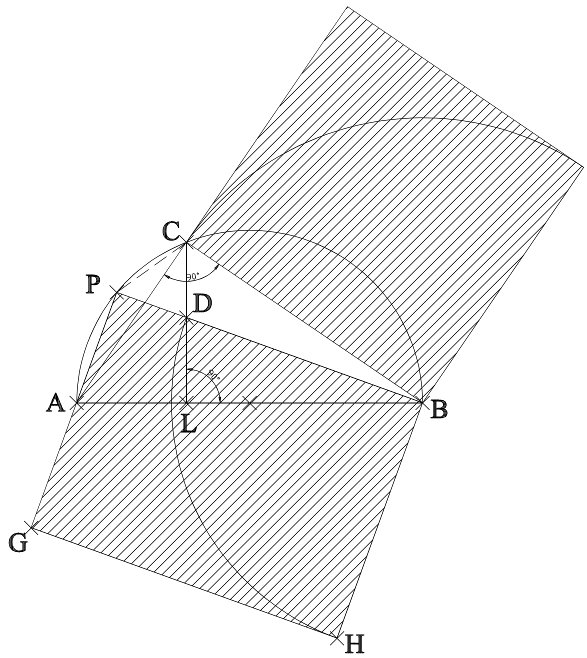
$$\begin{aligned}\overline{PB}\cdot\overline{DB} &= \left(\overline{PD}+\overline{DB}\right)\cdot\overline{DB}\\ &= \overline{PD}\cdot\overline{DB}+\overline{DB}^2\\ &= \overline{CL}^2-\overline{DL}^2+\overline{DB}^2\\ &= \overline{CL}^2+\overline{LB}^2=\overline{CB}^2\end{aligned}$$

b) (Umfangswinkel- und Winkelsummensatz)

$$\overline{\alpha}=\overline{\sphericalangle BAC}=\overline{\sphericalangle BPC}=\overline{\sphericalangle DCB}$$

Damit gilt: ΔPBC ist ähnlich zu ΔBCD.

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{DB}}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{PB}\cdot\overline{DB}=\overline{BC}^2$$



c) (Kathetensatz)

ΔABP ist ähnlich zu ΔBDL. Damit gilt:

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{LB}}{\overline{DB}}\quad\Leftrightarrow\quad\overline{PB}\cdot\overline{DB}=\overline{AB}\cdot\overline{LB}=\overline{BC}^2$$