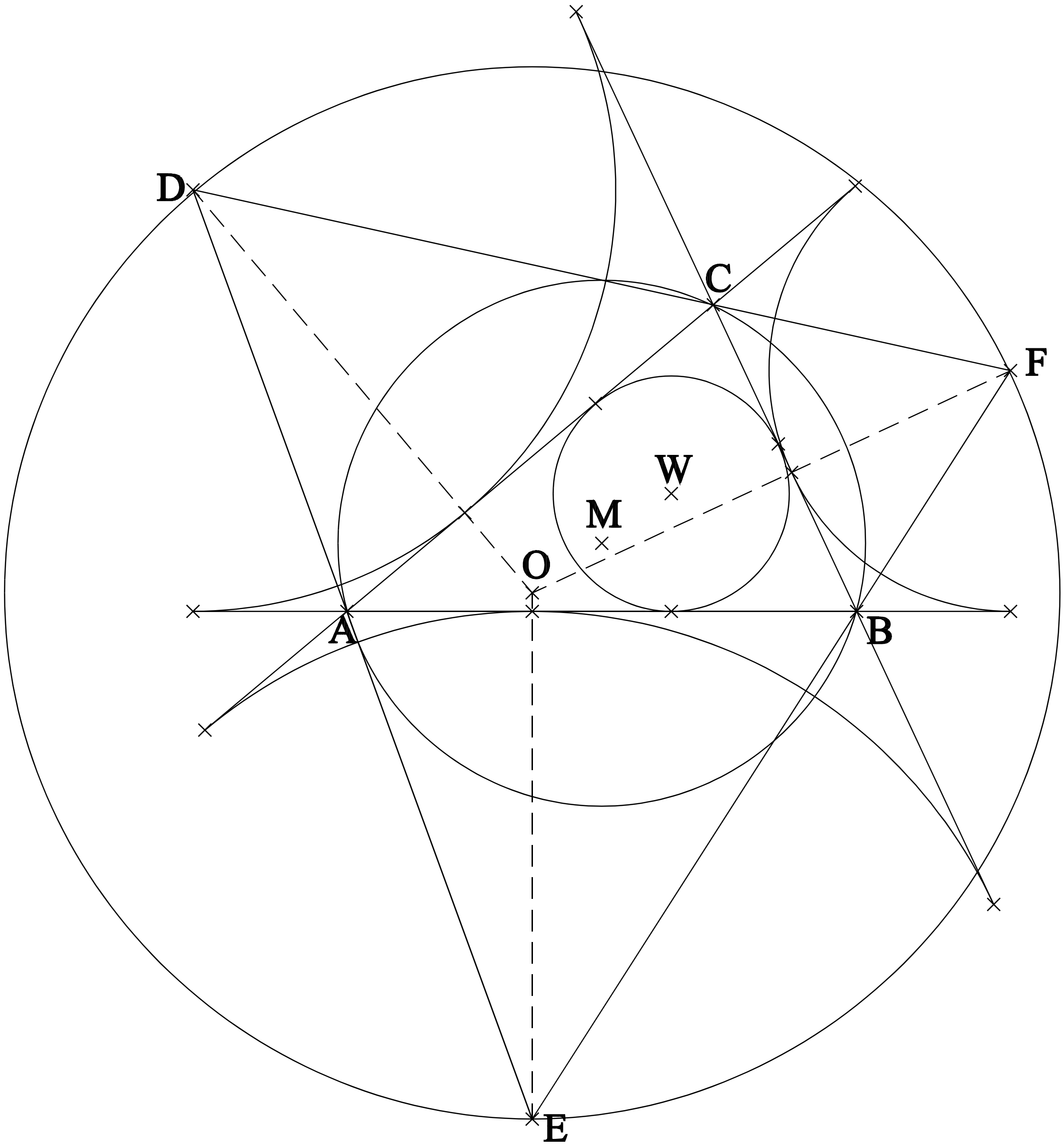
Dreieck und sechs Kreise

Folgerung aus dem Satz über den Feuerbachkreis

In die untere Figur sind <u>sechs</u> Kreise eingezeichnet: Der Innenkreis des Dreiecks ΔABC, sein Umkreis, die drei Ankreise, und als zusätzlicher Kreis der Umkreis des Dreiecks ΔDEF, das aus den Mittelpunkten der Ankreise gebildet wird. Dessen Mittelpunkt sei O.[1]



Untersuche die Figur auf Besonderheiten. - Schon etwas entdeckt? - Vergleiche eventuell mit Ergebnissen der Nachbarn. Überprüfe deine Entdeckungen möglicherweise durch Neukonstruktion an einem veränderten Beispiel.

Formuliere aufgrund deiner Untersuchungen Behauptungen in angemessener Fachsprache.

<u>Behauptungen:</u>

---

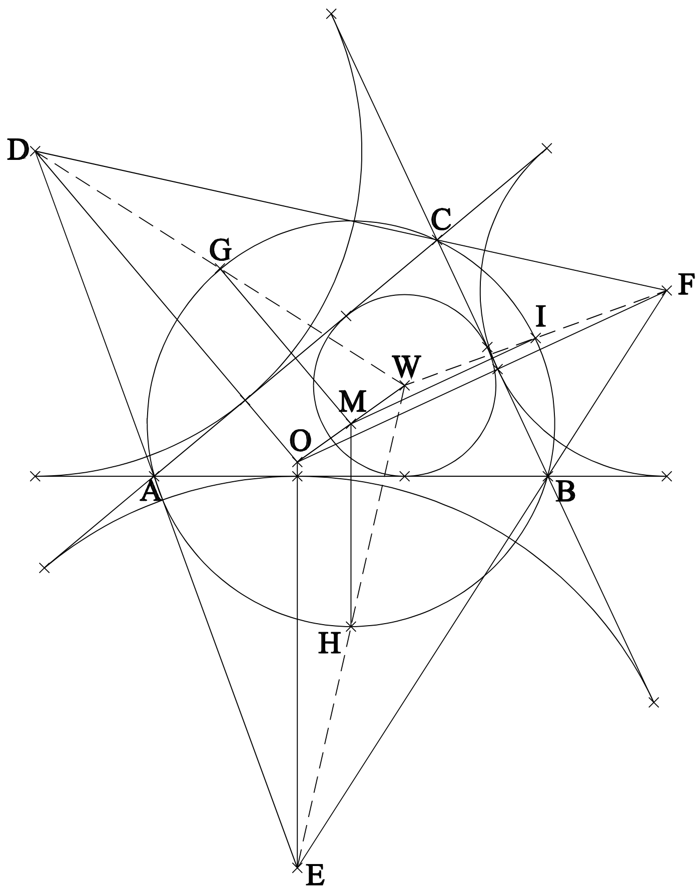
1 Von den Ankreisen sind, der Übersichtlichkeit wegen, nur Ausschnitte skizziert.

Behauptungen:

1. O, M und W liegen auf einer Geraden
2. $\overline{OM} = \overline{MW}$
3. $\overline{DO}\ \left(= \overline{EO} = \overline{FO} = \right) = 2 \cdot \overline{AM}\ \left(= 2 \cdot \overline{BM} = 2 \cdot \overline{CM} \right)$
4. $DO \perp CA \ \wedge\ EO \perp AB \ \wedge\ FO \perp BC$

Falls du einige dieser Eigenschaften nicht gefunden hattest, prüfe sie an der vorherigen Graphik durch Nachmessen. - Der Punkt O heißt **Bevan**-Punkt, benannt nach dem englischen Ingenieur Benjamin Bevan, der diese Eigenschaften im Jahre 1804 zuerst veröffentlicht hat. Den Beweis lieferte im gleichen Jahr **John Butterworth of Haggate**.

Wir wollen versuchen, den Beweisgang von John Butterworth of Haggate nachzuvollziehen, und wenn man weiß, dass er sich auch intensiv mit dem Neunpunktekreis beschäftigt hatte, so verwundert nicht, dass Eigenschaften des Feuerbachkreises bei seiner Argumentation eine Rolle spielten.



Wir tun so, als sei uns der Umkreis des Dreiecks ΔDEF und sein Mittelpunkt O unbekannt.

Wir konstruieren die Schnittpunkte G, H und I der Strecken DW, EW und FW mit dem Außenkreis des Dreiecks ΔABC. Wir zeichnen auch noch die drei Radien GM, HM und IM ein.
Eine Parallele zu GM durch D schneidet die Gerade g(M;W) in einem Punkt O und wir verbinden zum Schluß unserer Konstruktion O mit den Punkten E und F.

Begründe bzw ergänze die folgenden Schritte:[2]

– $\overline{DG} = \overline{GW} \;\Rightarrow\; \overline{OM} = \overline{MW}$

$\Rightarrow$

– $\overline{EH} = \overline{HW} \;\Rightarrow\; EO \parallel HM$

– $\overline{FI} = \overline{IW} \;\Rightarrow\; FO \parallel IM$

$\Rightarrow$

– $\overline{DO} = \overline{EO} = \overline{FO} = 2 \cdot R$

$\Rightarrow$ D, E und F liegen auf einem Kreis um den Mittelpunkt O und nach Konstruktion liegen O, M und W auf einer Geraden. Außerdem gilt: $\overline{OM} = \overline{MW}$.

– $\left(MH \perp AB \;\Rightarrow\; EO \perp AB \right) \wedge \left(MI \perp BC \;\Rightarrow\; FO \perp BC \right) \wedge \left(MG \perp CA \;\Rightarrow\; DO \perp CA \right)$

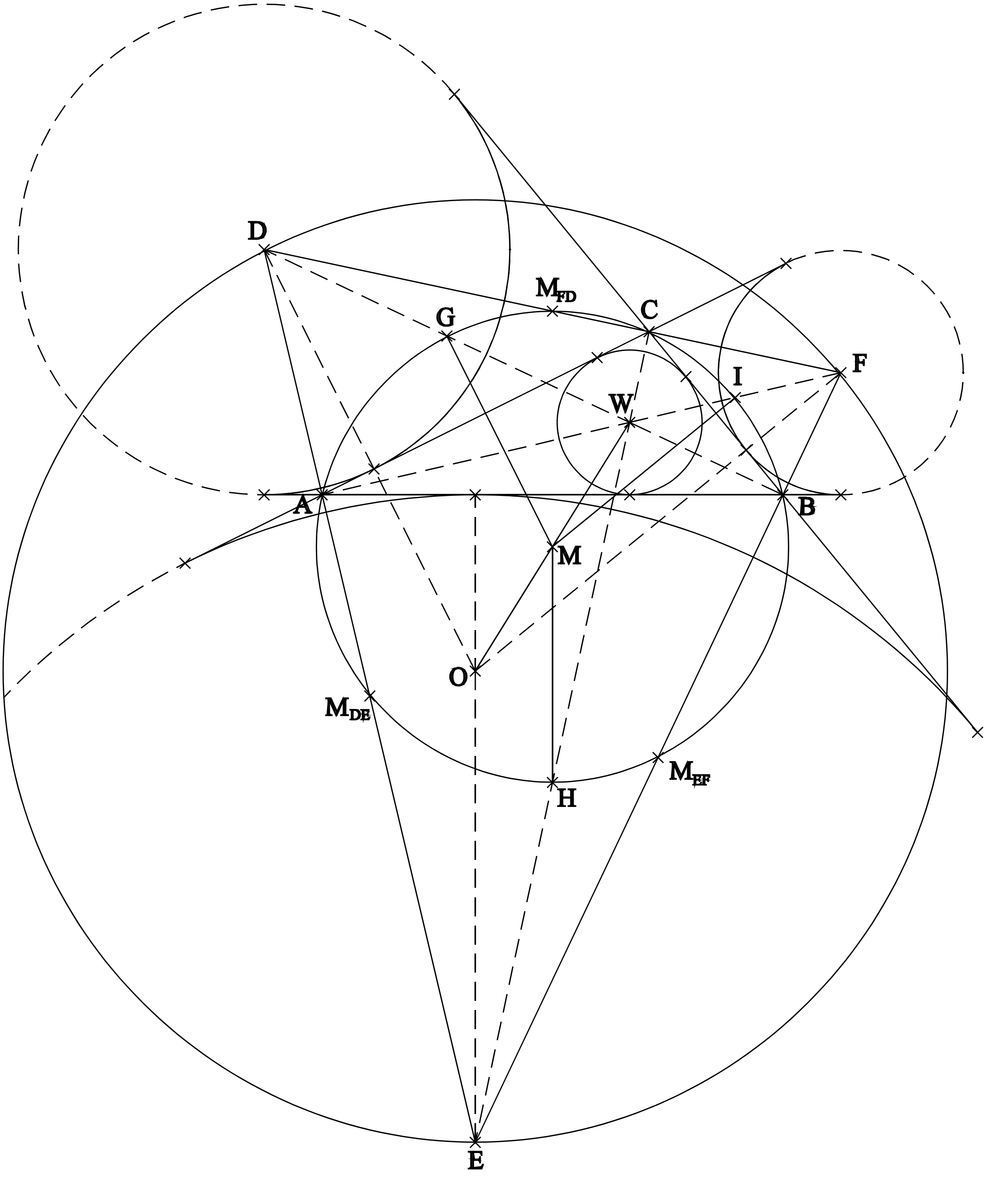
---

[2] Tipp: Der Umkreis des Dreiecks ΔABC ist der Feuerbachkreis des Dreiecks ΔDEF.

Dreieck und sechs Kreise

Folgerung aus dem Satz über den Feuerbachkreis

Ein stumpfwinkliger Fall mit zusätzlichen Hilfslinien und Bezeichnungen:



Quelle: http://everything2.com/index.pl?node_id=797910