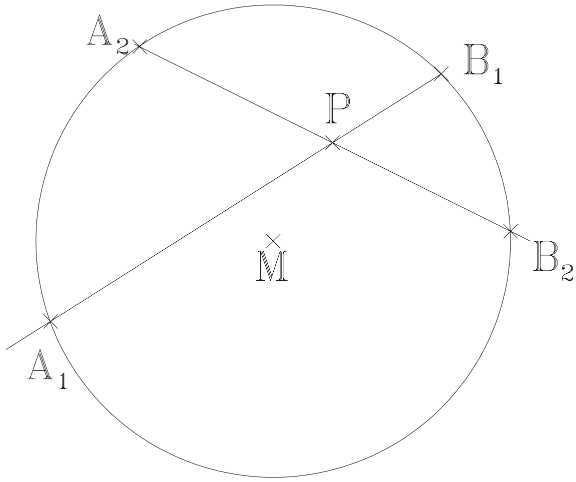
Ähnliche Dreiecke
Gedreht - Gestreckt - Verschoben: Und was folgt daraus?

Was uns bekannt ist:

Wir wissen, dass eine zentrische Streckung winkeltreu ist (und dass eine Gerade in eine parallele Gerade abgebildet wird). Zusammen mit den Kongruenzabbildungen: Drehung und Verschiebung entstehen durch Hintereinanderausführung die Ähnlichkeitsabbildungen Drehstreckung und Verschiebung.[1] - Und wegen der der zentrischen Streckung "innewohnenden" Strahlensätze gilt natürlich, dass u.a. die Seitenlängenverhältnisse entsprechender Seiten ähnlicher Figuren gleich sind.

Zeichne in dein Heft einen Kreis mit beliebigem Radius und wähle einen Punkt **P** innerhalb des Kreises. - Zeichne nun zwei beliebige Geraden $\mathbf{g_1}$ und $\mathbf{g_2}$ durch **P**.



Der Kreis schneidet aus den Geraden $\mathbf{g_1}$ und $\mathbf{g_2}$ zwei Sehnen $\mathbf{A_1B_1}$ und $\mathbf{A_2B_2}$ aus.

1. Der Punkt **P** teilt jede Sehne in 2 Teilstrecken. Miß die Längen der jeweiligen 2 Teilstrecken jeder Sehne und bilde die Produkte $\overline{\mathbf{A_1P}} \cdot \overline{\mathbf{PB_1}}$ und $\overline{\mathbf{A_2P}} \cdot \overline{\mathbf{PB_2}}$.
   Vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn.

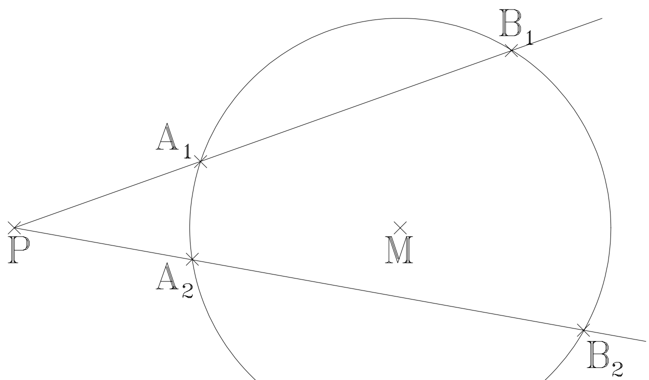
2. Verbinde die Punkte $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{A_2}$, sowie die Punkte $\mathbf{B_1}$ und $\mathbf{B_2}$. - Beweise: Δ $\mathbf{A_1PA_2}$ ist ähnlich zu Δ $\mathbf{B_1PB_2}$.
   Tip: Die Winkel mit Scheitelpunkt $\mathbf{A_2}$ und $\mathbf{B_1}$ sind Umfangswinkel über derselben Sehne ($\mathbf{A_1B_2}$). Erinnere dich an den Umfangswinkelsatz (Spezialfall: Satz des Thales) aus Klassenstufe 7.

3. Bilde geeignete Seitenverhältnisse der ähnlichen Dreiecke aus (2.) und zeige, dass das Ergebnis aus (1.) mit dem konstanten Produkt kein Zufall war. Formuliere deine Version des **Sehnensatzes** am Kreis.

4. Fasse die Sehnenabschnitte als Seitenlängen eines Rechteckes mit dem Flächeninhalt 15 cm^2 auf. - Konstruiere nach dem Sehnensatz (nur mit Zirkel und Lineal) eine Strecke der (inkommensurablen) Länge $\sqrt{15}$ cm.

....

Was passiert eigentlich, wenn der Punkt **P** außerhalb des Kreises liegt? - Zeichne eine entsprechende Figur in dein Heft.



5. Miß die Längen der jeweiligen 2 Teilstrecken der 2 Sekanten und bilde wiederum die Produkte $\overline{\mathbf{PA_1}} \cdot \overline{\mathbf{PB_1}}$ und $\overline{\mathbf{PA_2}} \cdot \overline{\mathbf{PB_2}}$.
   Vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn.

6. Verbinde die Punkte $\mathbf{A_1}$ und $\mathbf{B_2}$, sowie die Punkte $\mathbf{B_1}$ und $\mathbf{A_2}$. - Beweise: Δ $\mathbf{A_1PB_2}$ ist ähnlich zu Δ $\mathbf{B_1PA_2}$.

---

[1] Natürlich ist jede Kongruenzabbildung auch Ähnlichkeitsabbildung [von (Un)-Gleichsinnigkeit wollen wir absehen].

Ähnliche Dreiecke

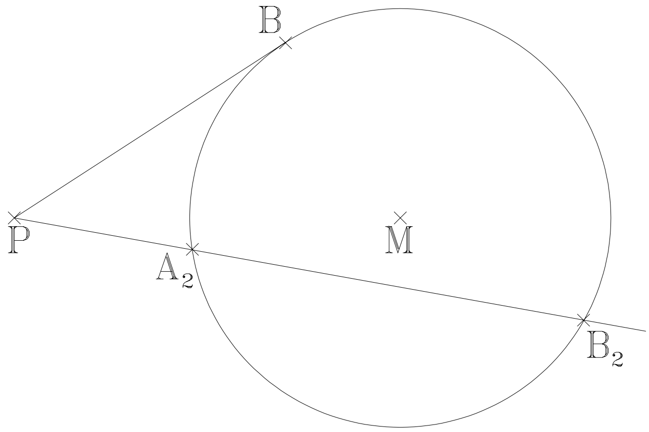
Gedreht - Gestreckt - Verschoben: Und was folgt daraus?

7. Bilde geeignete Seitenverhältnisse der ähnlichen Dreiecke aus (6.) und zeige, dass das Ergebnis aus (5.) mit dem konstanten Produkt kein Zufall war. Formuliere deine Version des **Sekantensatzes** am Kreis.

8. Fasse die Sekantenabschnitte als Seitenlängen eines Rechteckes mit dem Flächeninhalt 15 cm^2 auf. - Untersuche, ob sich auch nach dem Sekantensatz (nur mit Zirkel und Lineal) eine Strecke der (inkommensurablen) Länge $\sqrt{15}$ cm konstruieren läßt.

Und wenn die eine Sekante entartet zur Tangente? - Was dann?

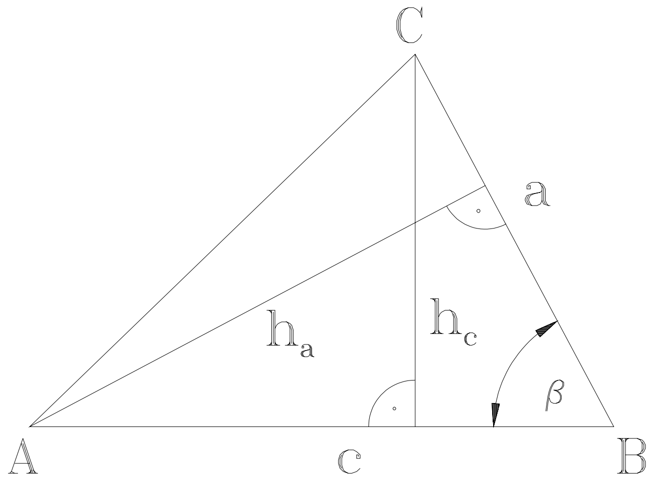
9. Formuliere deine Version des **Tangentensatzes** am Kreis. - Fasse die Sekantenabschnitte als Seitenlängen eines Rechteckes mit dem Flächeninhalt 15 cm^2 auf.
   Konstruiere nach dem Tangentensatz (nur mit Zirkel und Lineal) eine Strecke der (inkommensurablen) Länge $\sqrt{15}$ cm.



Zurück zu Dreiecken. - Fällt man in einem beliebigen (spitzwinkligen) Dreieck die jeweiligen Lote auf die Grundseite, so teilen die Höhen das Dreieck in 2 Teildreiecke.

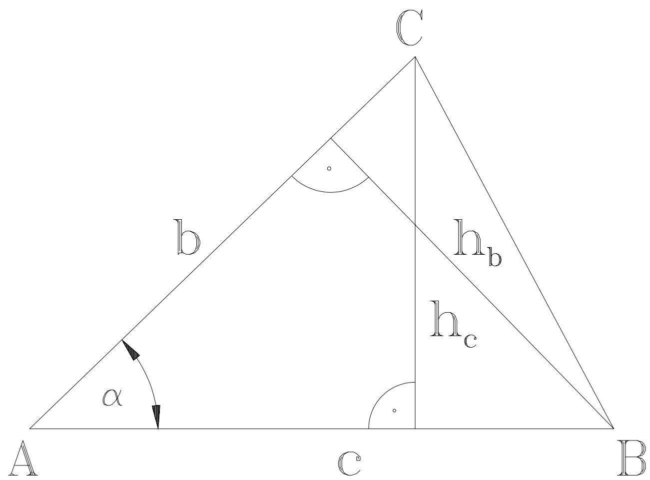
Bezeichne die Fußpunkte in der rechten Graphik mit $\mathbf{F_a}$ und $\mathbf{F_c}$.

10. <u>Beweise:</u> Δ $\mathbf{ABF_a}$ ist ähnlich zu Δ $\mathbf{BCF_c}$. - Welche Beziehung zwischen Höhen und Dreiecksseiten des Originaldreiecks ergibt sich daraus?



Bezeichne die Fußpunkte in der rechten Graphik mit $\mathbf{F_b}$ und $\mathbf{F_c}$.

11. <u>Beweise:</u> Δ $\mathbf{AF_cC}$ ist ähnlich zu Δ $\mathbf{BF_bA}$. - Welche Beziehung zwischen Höhen und Dreiecksseiten des Originaldreiecks ergibt sich daraus?



12. Fasse die Beziehungen von (10.) und (11.) zusammen und bestätige eine weitere Beziehung über die **Höhen** im Dreieck:

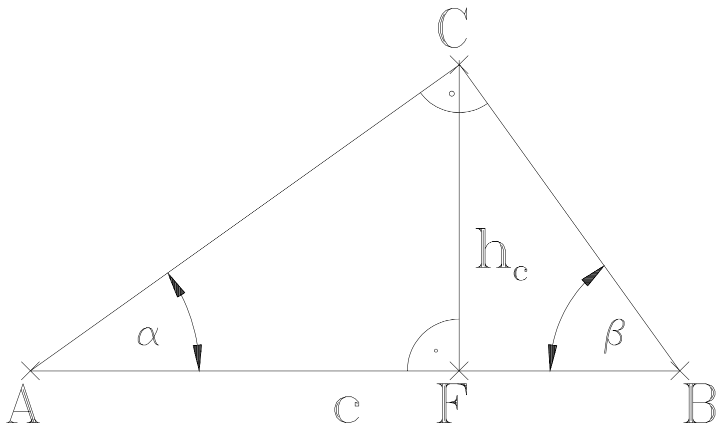
$$\boxed{\mathbf{a : b : c = \frac{1}{h_a} : \frac{1}{h_b} : \frac{1}{h_c}}}$$

Ähnliche Dreiecke

Gedreht - Gestreckt - Verschoben: Und was folgt daraus?

13. Untersuche, ob der Höhensatz von (12.) auch im Fall eines stumpfwinkligen Dreiecks gilt. Fertige eine geeignete Skizze an. (HA)

Nun noch ein für die Klassenstufe 10 wichtiger Spezialfall eines rechtwinkligen Dreiecks.



14. <u>Beweise:</u> Δ **ABC** ist ähnlich zu Δ **AFC** und ähnlich zu Δ **FBC** . Bilde zu den Seitenverhältnissen des großen Dreiecks:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \; ; \; \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \; ; \; \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

die jeweiligen zugehörigen (gleichen) Seitenverhältnisse der beiden Teildreiecke. Bezeichne den dritten Winkel der beiden Teildreiecke geeignet. - Beziehe die Seitenverhältnisse stets sinnvoll auf den Winkel $\boldsymbol{\alpha}$.[2]

Quelle: LS Geometrie 2, Klett Verlag, 1.Auflage 1985

[2] <u>Hinweis:</u> Bei einem rechtwinkligen Dreieck nennt man die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite: Hypothenuse, die dem rechten Winkel anliegenden Seiten: Katheten.