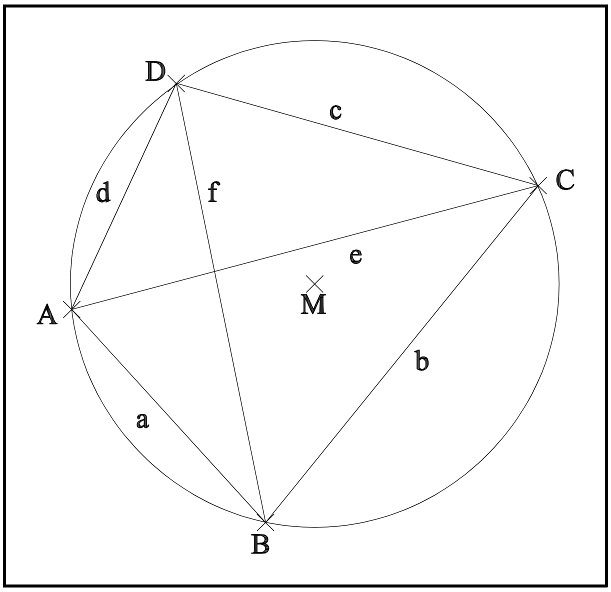
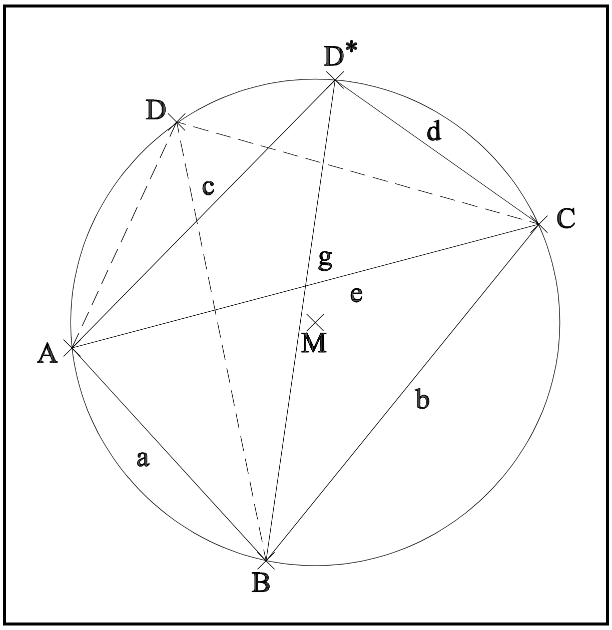
Ähnliche Dreiecke III
Sehnen, Sekanten, ... und weitere Folgerungen



1. Der indische Mathematiker Brahmagupta (598 - 660) hat sich u.a. auch mit Sehnenvierecken beschäftigt, was noch Thema in Klassenstufe 10 sein wird, und hat die folgende Verhältnisgleichung für ein Sehnenviereck angegeben:

$$\boxed{\frac{e}{f} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{a \cdot b + c \cdot d}}$$

Überprüfe diese Proportion an einem selbstgewählten Beispiel. - Begründe mit einem Gegenbeispiel, dass diese Beziehung für allgemeine Vierecke falsch ist.



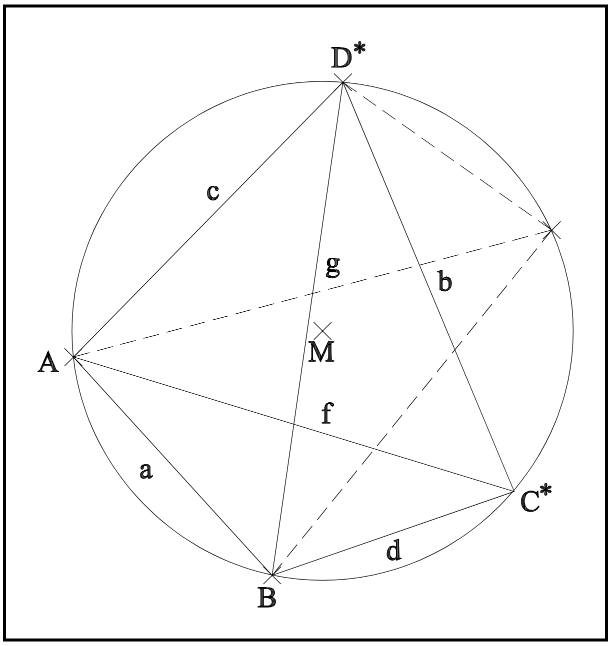
Zum Beweis der Verhältnisgleichung gehen wir von einem speziellen Sehnenviereck mit festen Vierecksseiten a, b, c, d aus. Für dieses Sehnenviereck gilt nach dem Satz des Ptolemaios:

$$e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$$

Wenn wir nun die Reihenfolge der Vierecksseiten c und d vertauschen, d.h. den Punkt D auf der Kreisperipherie in den Punkt D* verschieben, so verändert sich die Diagonale f in eine neue Diagonale g.

Damit gilt für dieses neue Sehnenviereck mit gleich langen Vierecksseiten nach nach dem Satz des Ptolemaios:

$$e \cdot g = a \cdot d + b \cdot c$$



Eine weitere Vertauschung der Vierecksseiten d und b verändert die Diagonale e wiederum in die Diagonale f (Begründung?! - Umfangswinkelsatz?), und nun gilt nach dem Vierecksatz des Ptolemaios:

$$g \cdot f = a \cdot b + c \cdot d$$

Begründe, dass es nur 3 wesentlich verschiedene Sehnenvierecke mit 4 festen Seitenlängen geben kann.

Durch Multiplikation der linken und rechten Seiten der 3 Gleichungen erhält man:

$$e^2 \cdot f^2 \cdot g^2 = (ac + bd) \cdot (ad + bc) \cdot (ab + cd)$$

und damit folgt aus der letzten Beziehung:

$$e^2 = \frac{e^2 \cdot f^2 \cdot g^2}{f^2 \cdot g^2} = \frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{(ab+cd)^2} = \frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)}{(ab+cd)}$$

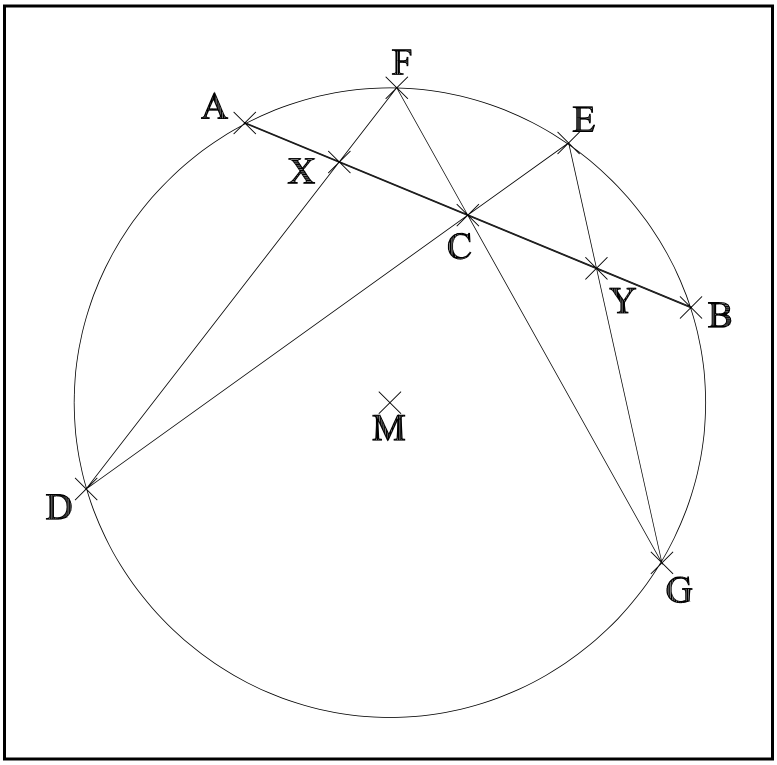
$$f^2 = \frac{e^2 \cdot f^2 \cdot g^2}{e^2 \cdot g^2} = \frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{(ad+bc)^2} = \frac{(ac+bd)\cdot(ab+cd)}{(ad+bc)}$$

$$g^2 = \frac{e^2 \cdot f^2 \cdot g^2}{e^2 \cdot f^2} = \frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{(ac+bd)^2} = \frac{(ad+bc)\cdot(ab+cd)}{(ac+bd)}$$

Bilde nun den Quotienten $\frac{e^2}{f^2}$ und zeige, dass daraus die Behauptung von Aufgabe 1 folgt. Gib auch Gleichungen für die Proportionen $\frac{e}{g}$ und $\frac{f}{g}$ an und überprüfe diese Proportionen an dem zuvor gewählten Beispiel. Berechne dann die einzelnen Diagonalenlängen und vergleiche die Ergebnisse mit den vorherigen Messungen.

2. Zeichne einen Kreis mit einer Sehne AB, konstruiere den Mittelpunkt dieser Sehne und benenne ihn mit C um Verwechslungen mit dem Mittelpunkt des Kreises zu vermeiden.
Zeichne nun zwei weitere Sehnen DE und FG durch den Punkt C und verbinde F mit D und E mit G.

   Die Sehne AB schneidet aus den Dreiecken ΔDCF und ΔGEC zwei Strecken XC und CY aus. - Miss die Längen dieser Strecken. Vergleiche mit den Ergebnissen der Nachbarn.



....

Ähnliche Dreiecke III
Sehnen, Sekanten, ... und weitere Folgerungen

Behauptung:

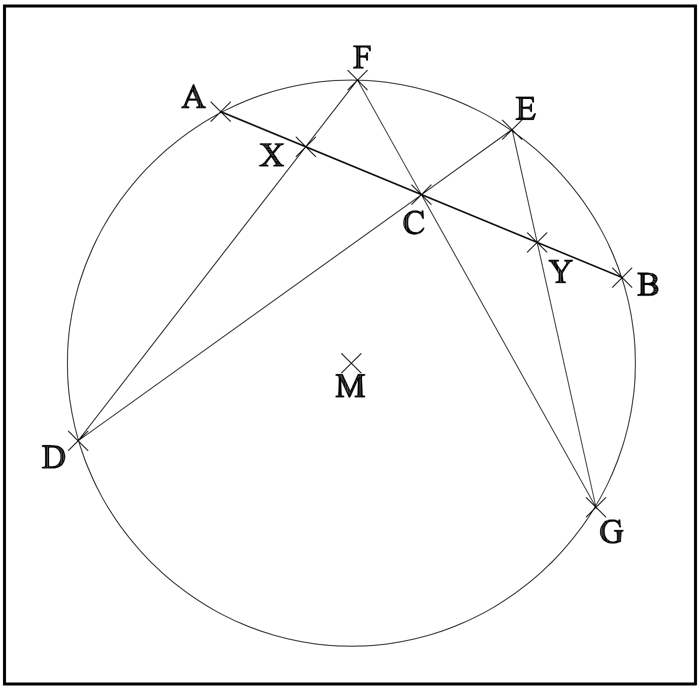
C ist auch Mittelpunkt der Strecke XY, d.h. die Streckenlängen XC und CY sind gleich lang.

Einen Beweis findet man im Internet auf einer Seite von Antonio Gutierrez unter dem Stichwort:

Schmetterling Theorem

http://agutie.homestead.com/files/GeometryButterfly.html

Notiere die einzelnen Beweisschritte in unserer Art der Fachsprache und Bezeichnungsweisen und vollziehe die Begründungen verständig nach. Du solltest in der Lage sein, den Beweis im Unterricht vorzutragen.

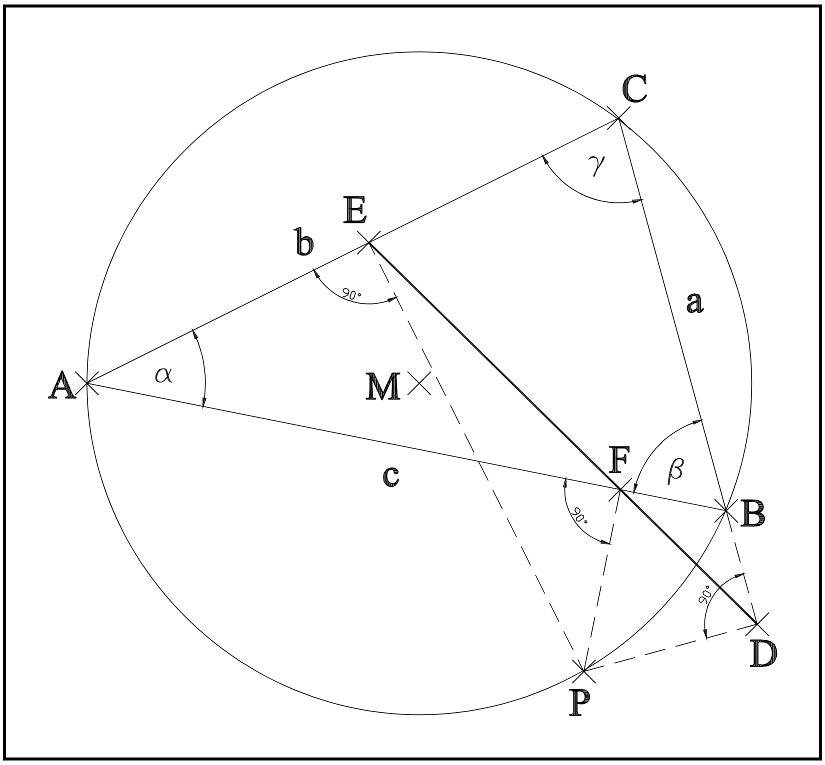


---

3. Gegeben ist ein Dreieck mit seinem Außenkreis. Fällt man von einem beliebigen Kreispunkt P Lote auf alle Dreiecksseiten, dann sieht es in der nebenstehenden Konstruktion so aus, als lägen die drei Lotfußpunkte D, E und F auf einer Geraden.

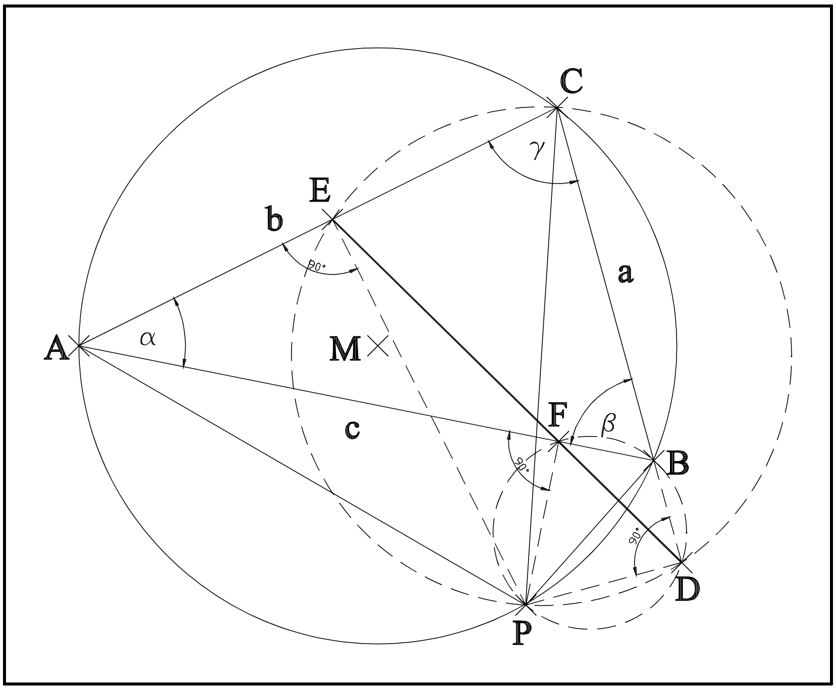
Probiere es aus!

Ist das auch so, wenn das Dreieck stumpfwinklig ist? - Fertige eine entsprechende Konstruktion an.



Ähnliche Dreiecke III
Sehnen, Sekanten, ... und weitere Folgerungen

Ziel des Beweises ist zu zeigen, dass die Winkel $\sphericalangle FDP$ und $\sphericalangle EDP$ kongruent sind, denn dann müßten bei gleichem zweiten Schenkel DP die ersten Schenkel FD und ED auf einer Geraden liegen.
Verbinde deshalb in deiner Skizze zunächst den Punkt P mit den Eckpunkten des Dreiecks und begründe, dass die Vierecke $\square PDBF$ und $\square PDCE$ Sehnenvierecke sind.



Analysiere die folgenden Schritte:

$\overline{\sphericalangle FDP} = \overline{\sphericalangle FBP}$ (Sehne FP)
$\overline{\sphericalangle ABP} = \overline{\sphericalangle FBP}$ ($F \in AB$)

$\overline{\sphericalangle ABP} = \overline{\sphericalangle ACP}$ (Sehne AP)
$\overline{\sphericalangle ECP} = \overline{\sphericalangle ACP}$ ($E \in AC$)

(Sehne EP) $\Rightarrow$ $F \in ED$

Die Gerade durch die drei Lotfußpunkte D, E und F heißt Simson-Gerade.[1]

Robert **Simson**,
✳ 14. Oktober 1687 in West Kilbride, Ayrshire, Schottland
† 01. Oktober 1768 in Glasgow, Schottland

---

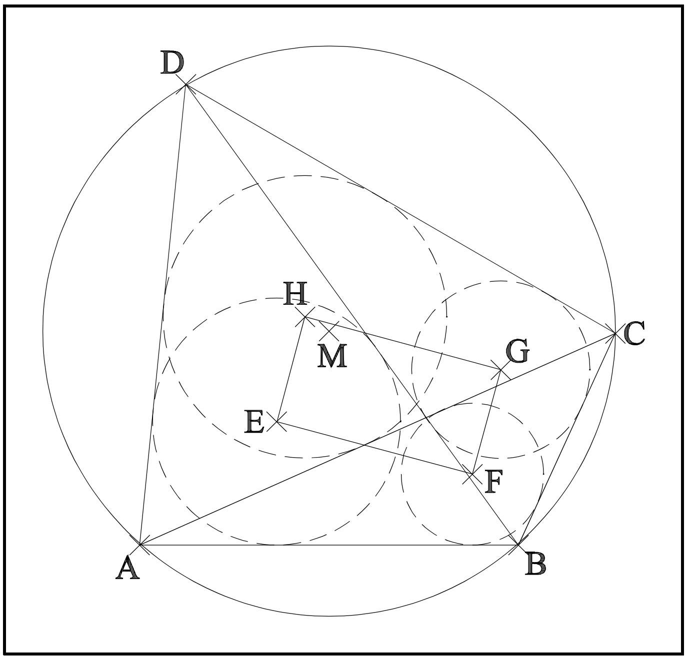
4. Gegeben ist ein Sehnenviereck. Jede der beiden Diagonalen des Vierecks teilt dieses in jeweils zwei Dreiecke, die einen Innenkreis besitzen.

   Behauptungen:

   a) Das Viereck $\square EFGH$, gebildet aus den Mittelpunkten der vier Innenkreise, ist ein Rechteck.

   b) Es gilt: $r_E + r_G = r_F + r_H$

   Quelle: http://www.agutie.com (Antonio Gutierrez)

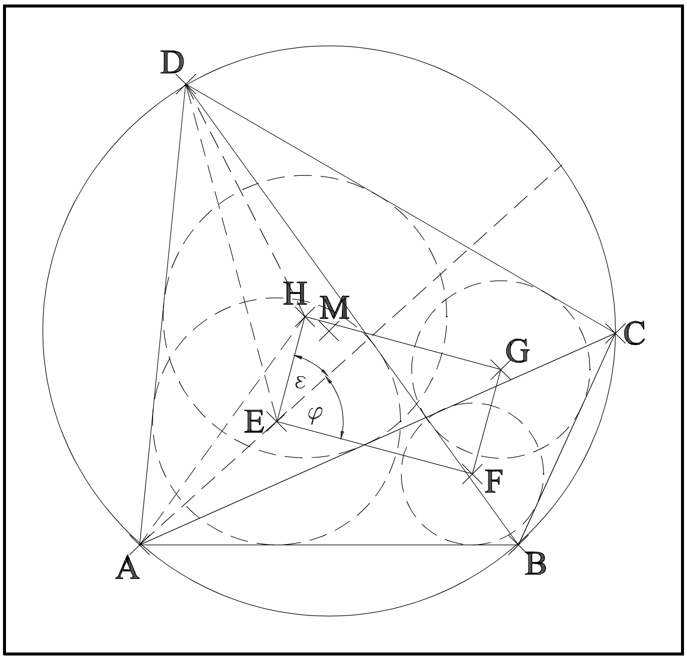


---

[1] Quelle: http://www.matheraetsel.de/texte/simpson-gerade-main.pdf

Ähnliche Dreiecke III
Sehnen, Sekanten, ... und weitere Folgerungen

Die Graphik wurde durch einige Hilfslinien und Bezeichnungen ergänzt und wir konzentrieren uns im folgenden zunächst auf die Vierecksseite AD bzw. die beiden Dreiecke ΔABD und ΔACD.



Begründe die folgenden Beweisschritte.

– $\overline{\sphericalangle DBA} = \overline{\sphericalangle DCA}$
– $\overline{\sphericalangle DEA} = \overline{\sphericalangle DHA}$
– □AEHD ist ein Sehnenviereck
– $\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\delta}$

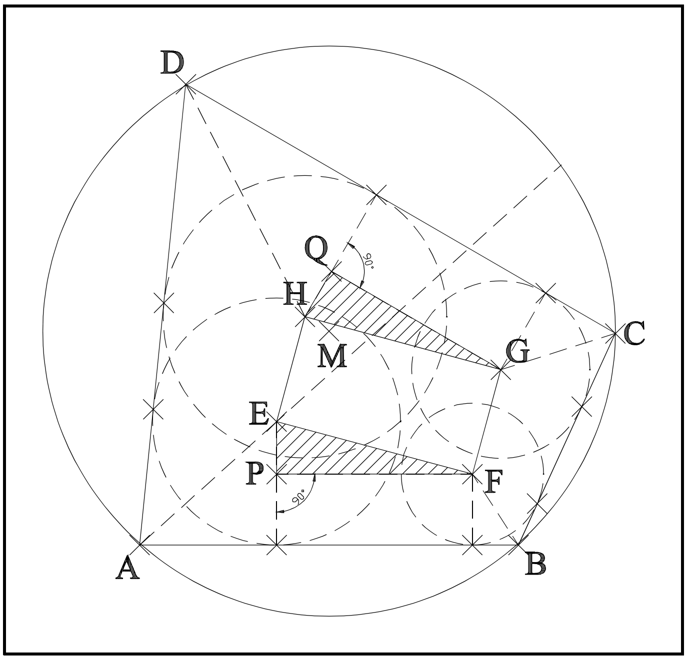
Konzentriere dich nun auf die Vierecksseite AB bzw. die beiden Dreiecke ΔABC und ΔABD.

Ergänze die Skizze mit geeigneten Hilfslinien und gib zum Vorherigen entsprechende Beweisschritte und Begründungen an um zu zeigen: $\overline{\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\beta}$. - Begründe: $\overline{\varepsilon} + \overline{\varphi} = 90°$.

Äquivalente Beweisschritte für Winkel in den Eckpunkten F, G und H beweisen insgesamt Teil a).

Zu Teil b):

Wir versuchen zu zeigen, dass die Dreiecke ΔPFE und ΔHGQ kongruent sind.



EF und HG sind gegenüberliegende Rechtecksseiten und damit gleich lang, und beide Dreiecke sind rechtwinklig.

Beweise unter Verwendung vorheriger Ergebnisse, dass gilt:

$$\overline{\sphericalangle EFP} = \frac{\overline{\beta}}{2} - \frac{\overline{\alpha}}{2} \quad \wedge \quad \overline{\sphericalangle QGH} = \frac{\overline{\gamma}}{2} - \frac{\overline{\delta}}{2}$$

und zeige, dass diese Winkelmaße bei einem Sehnenviereck gleich sind.

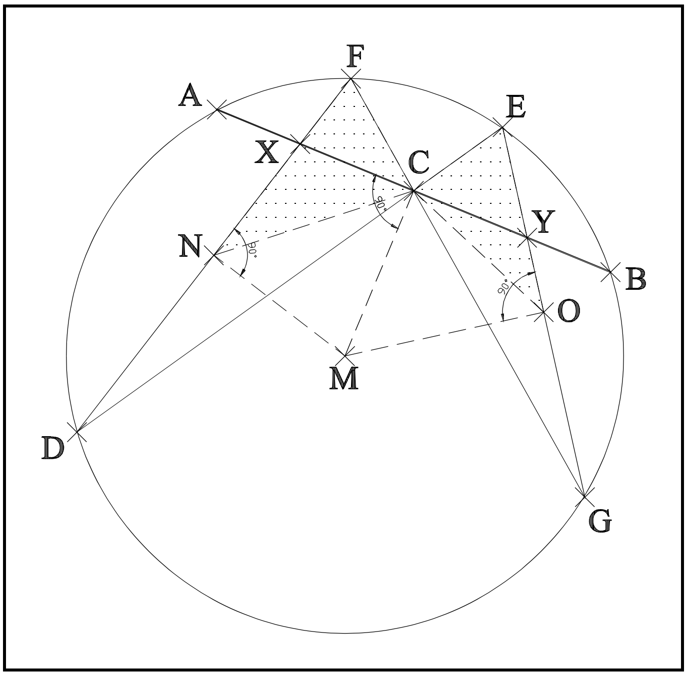
Insgesamt folgt nun, dass die Dreiecke ΔPFE und ΔHGQ kongruent sind, womit insbesondere die Strecken PE und HQ gleich lang sind.

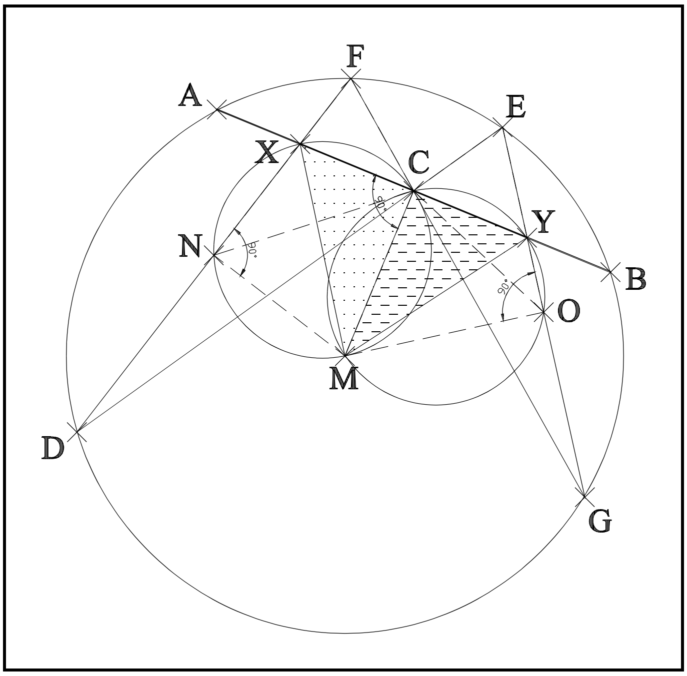
$$\boxed{\overline{PE} = r_E - r_F = r_H - r_G = \overline{HQ} \quad \Rightarrow \quad r_E + r_G = r_H + r_F}$$

Ähnliche Dreiecke III
Sehnen, Sekanten, ... und weitere Folgerungen

<u>Beweisskizze zu 2.:</u> (Für alle, die über keinen Internetanschluß verfügen)

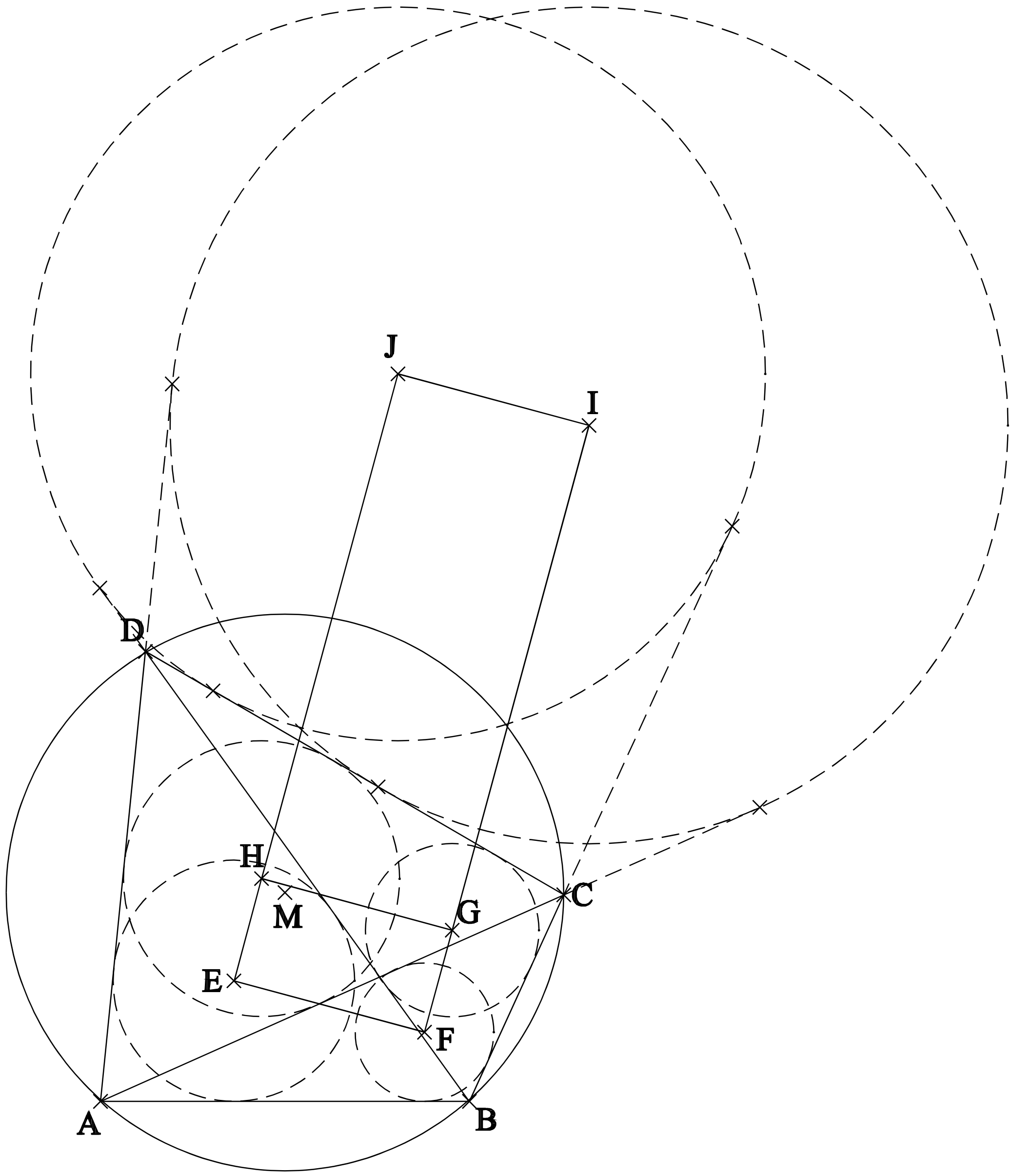
– Weil ΔDCF ähnlich ist zu ΔGEC (gleich große Umfangswinkel über den Sehnen DG und FE) ist auch ΔNCF ähnlich zu ΔOEC. ⇒ $\overline{\sphericalangle CNF} = \overline{\sphericalangle EOC}$
– Weil □NMCX und □OYCM Sehnenvierecke sind, folgt: (Umfangswinkel über XC und CY) $\overline{\sphericalangle CNX} = \overline{\sphericalangle CMX}$ und $\overline{\sphericalangle YOC} = \overline{\sphericalangle YMC}$
– ΔMCX ≅ ΔMYC ⇒ $\overline{XC} = \overline{CY}$





Ähnliche Dreiecke III
Sehnen, Sekanten, ... und weitere Folgerungen

Nachtrag für besonders Interessierte zu 4):



Konstruiert man die Außenkreise an die Vierecksseite DC bezogen auf die Teildreiecke ΔACD und ΔBCD, so bilden die Mittelpunkte I und J dieser beiden Kreise zusammen mit den Mittelpunkten G und H der zugehörigen Innenkreise wiederum ein Rechteck □GIJH. - Beweis?