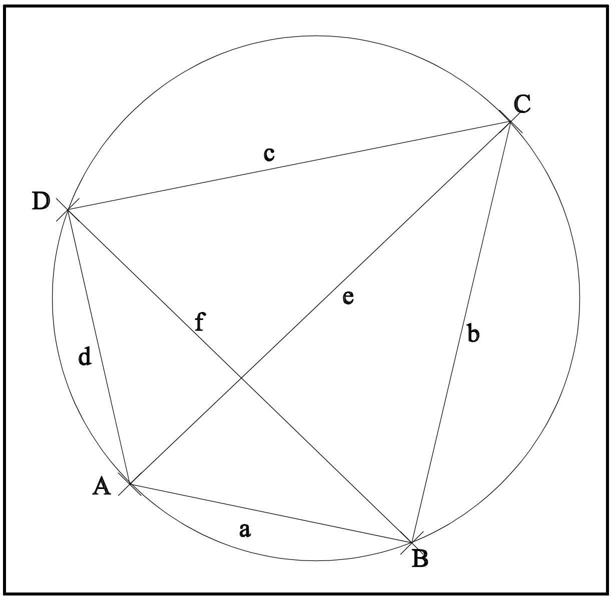
Ähnliche Dreiecke II
Sehnen, Sekanten, ... und ihre Folgerungen

Klaudios **Ptolemaios**[1] hat sich u.a. viel mit Sehnen am Kreis beschäftigt. Auf ihn geht ein Satz über Flächeninhalte bei einem Sehnenviereck zurück.



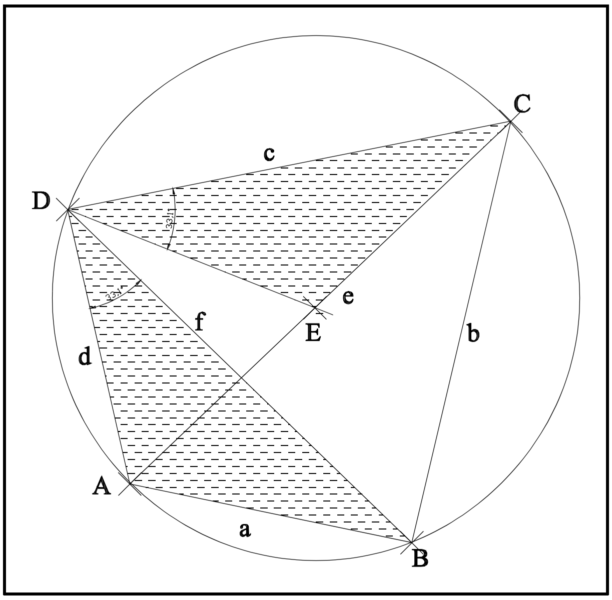
1. Zeichne in dein Heft ein Sehnenviereck, etwa so wie nebenstehend, miss die Längen aller 4 Seiten und der beiden Diagonalen.
   Flächeninhalte haben etwas mit Produkten von Streckenlängen zu tun und die Diagonalen nehmen sicher, gegenüber den Seiten, eine Sonderstellung ein. Deshalb bilde das Produkt:

   $$\mathbf{e \cdot f}\,.$$

   Versuche herauszufinden, ob Produkte von Seitenlängen eventuell zum gleichen Ergebnis führen. - Hat dein Nachbar schon etwas entdeckt?

   Formuliere deine Version des **Satzes des Ptolemaios** für allgemeine Sehnenvierecke am Kreis!

Irgendwie muss in die weitere Untersuchung der Figur und der Beweisführung für deinen Satz die Eigenschaften eines Sehnenviereckes eingehen. - Was wissen wir eigentlich über ein Sehnenviereck bzw über die Umfangswinkel über einer Sehne am Kreis?



2. Kennzeichne in der Figur Winkel gleicher Größe geeignet. Begründe deine Entscheidungen.
   (z.B. gilt: $\overline{\sphericalangle DBA} = \overline{\sphericalangle DCA}$; warum wohl ?)

3. Zeichne eine Gerade durch den Punkt D unter einem Winkelmaß zur Strecke DC so, dass dieses Winkelmaß gleich $\overline{\sphericalangle ADB}$ ist. Benenne den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Diagonalen AC mit dem Buchstaben E.

   Begründe: Die schraffierten Dreiecke sind **ähnlich**.

Es gilt:

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{f}} = \frac{\overline{\mathbf{EC}}}{\mathbf{c}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{a \cdot c} = \overline{\mathbf{EC}} \cdot \mathbf{f}$$

Nun, das sieht ja schon wie "die halbe Miete" aus. Von der zweiten Diagonalen (e = AC) fehlt uns nur noch die Strecke AE. - Diese Strecke AE taucht z.B. in dem Dreieck ΔAED auf, womit gleich eine weitere Vierecksseite (d = AD) in unsere Überlegungen einbezogen wird.

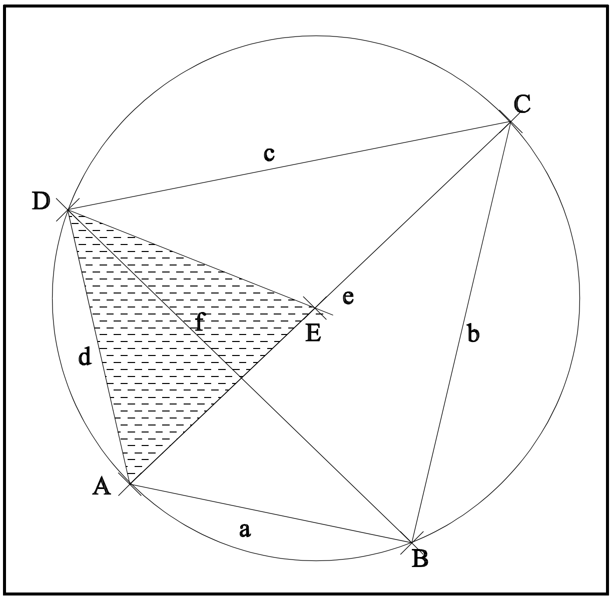
---

[1] Gelebt ungefähr von 100 n. Chr. bis ungefähr 160 n. Chr. in Alexandria

Ähnliche Dreiecke II
Sehnen, Sekanten, ... und ihre Folgerungen

4. Finde begründet ein Dreieck in der nebenstehenden Figur, das zu dem schraffierten Dreieck ΔAED ähnlich ist.

Beweise: $\mathbf{\frac{b}{f} = \frac{\overline{AE}}{d} \Leftrightarrow b \cdot d = \overline{AE} \cdot f}$



Damit gilt, in Zusammenhang mit dem Ergebnis von 3.:

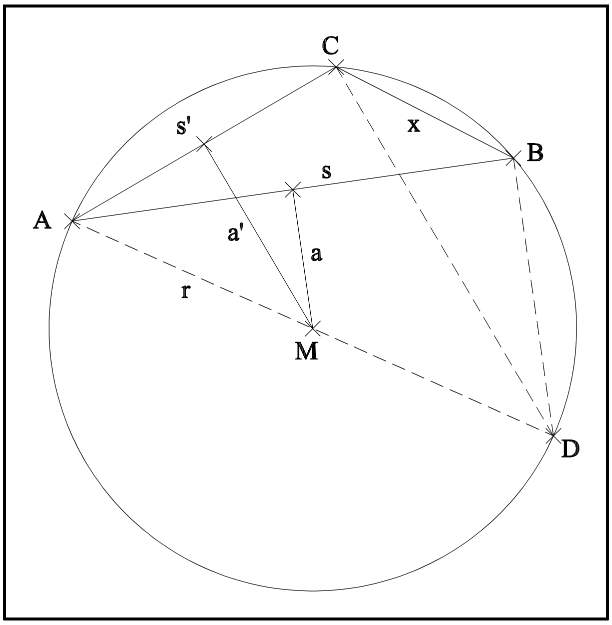
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{a \cdot c + b \cdot d} &= \mathbf{\overline{EC} \cdot f + \overline{AE} \cdot f} \\ \mathbf{a \cdot c + b \cdot d} &= \mathbf{\left(\overline{EC} + \overline{AE}\right) \cdot f} \\ \mathbf{a \cdot c + b \cdot d} &= \mathbf{e \cdot f} \end{aligned}}$$

<u>Satz des Ptolemaios:</u>
In einem Sehnenviereck ist die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke aus je zwei Gegenseiten gleich dem Flächeninhalt des Rechteckes aus den Diagonalen.[2]

Was ergibt sich eigentlich als Aussage des Satzes, wenn das Sehnenviereck speziell ein Rechteck ist? - Hatten wir das nicht schon einmal in anderem Zusammenhang?

<u>Und nun zu Folgerungen:</u>

Kennt man die Länge zweier Kreissehnen **s := AB** und **s' := AC**, so kann man mit den Satz des Ptolemaios die Länge der Sehne **x := CB** berechnen.



5. Gib die Abstände **a** und **a'** der Sehnen zum Mittelpunkt des Kreises in Abhängigkeit von **s**, **s'** und **r** an.

6. Beweise: $\mathbf{x} = \frac{s \cdot a' - s' \cdot a}{r}$

   <u>Tipp:</u> In der Skizze findest du rechte Winkel und Strahlensatzfiguren.

7. Begründe über die zugehörigen Zentriwinkel: Wenn $s = s_6$ und $s' = s_{10}$ dann ist $x = s_{15}$.

8. Bekanntlich ist die Sehne s_6 des regelmäßigen Sechseckes genauso groß wie der Radius r des Kreises, und es gilt: $s_{10} = \frac{1}{2} \cdot \left(\sqrt{5} - 1\right) \cdot r$. - Berechne s_{15}.
   Konstruiere ein regelmäßiges 15-Eck auf der Grundlage deiner Berechnungen mit r = 8 cm.

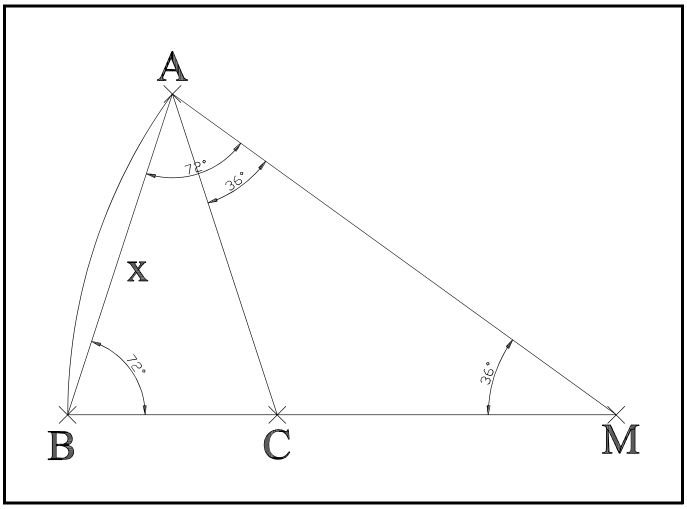
---

[2] Hattest du es auch so gefunden? - Bravo!

Ähnliche Dreiecke II
Sehnen, Sekanten, ... und ihre Folgerungen

Nachtrag: (Beweis für die Länge von s_{10}):

Nebenstehend ist ein Segment eines regelmäßigen 10-Ecks gezeichnet, wobei die Sehne $\mathbf{s_{10}}$ der Einfachheit halber mit **x** bezeichnet wurde. Vom Anfangspunkt A der Sehne wurde die Winkelhalbierende konstruiert, die den Kreisradius BM im Punkt C schneidet.



9. Begründe, dass gilt:

   1. $x = \overline{AC} = \overline{CM}$
   2. $\Delta BCA \simeq \Delta ABM$

   Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ΔBCA und ΔABM gilt (r = 1):

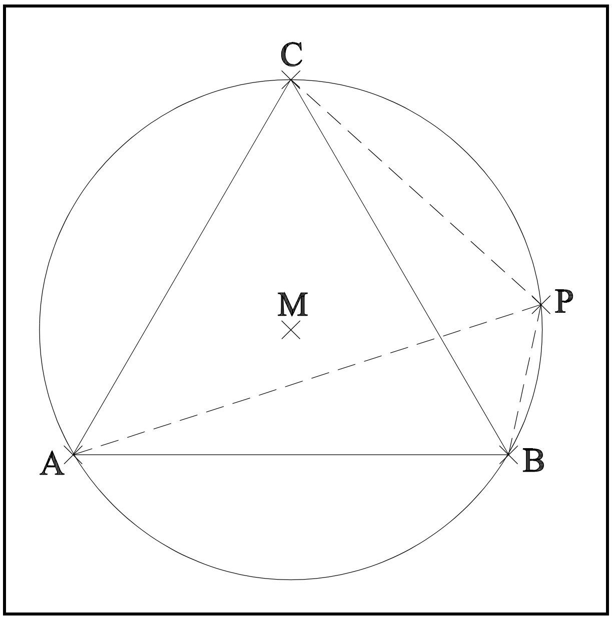
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

10. Beweise, dass gilt (r = 1):

$$\boxed{s_{10} = \frac{1}{2}\cdot\left(\sqrt{5} - 1\right)}$$

---

11. Eine Aufgabe aus dem Jahre 1646:[3]



   In einen Kreis ist ein gleichseitiges Dreieck einbeschrieben.
   Wählt man auf der Peripherie des Kreises über der Sehne BC einen Punkt P, so gilt:

$$\boxed{\overline{AP} = \overline{BP} + \overline{PC}}$$

   Überprüfe die obige Behauptung von Frans **van Schooten** durch Nachmessen an einem geeigneten Beispiel.

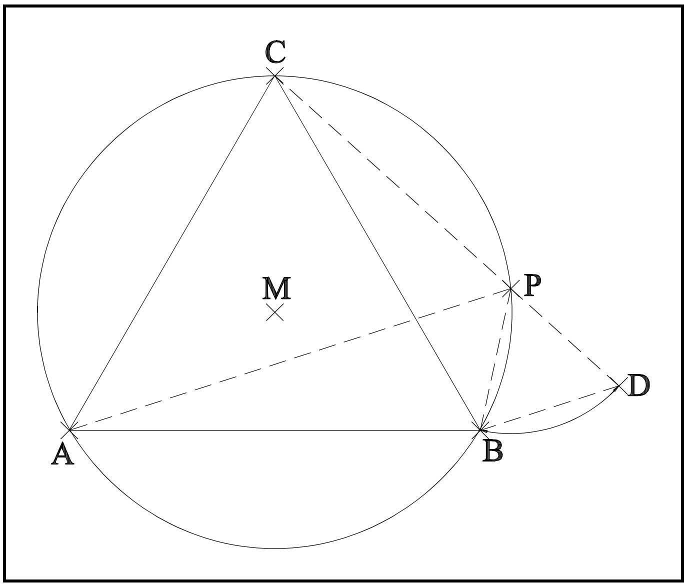
   Beweise das Theorem von Frans **van Schooten** unter Verwendung des Vierecksatzes des **Ptolemaios**.

---

[3] Frans **van Schooten**, ✳ 1615 in Leiden, Niederlande, † 29 Mai 1660 in Leiden, Niederlande

12. Die Figur aus Aufgabe 11 wurde ergänzt.

    Analysiere die neue Graphik und beweise das Theorem von Frans **van Schooten** ohne Verwendung des Viereckssatzes des **Ptolemaios**.[4]



[4] Quelle: http://www.pandd.demon.nl/index.html (Dick Klingens)