Zur Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

oder: ... es gibt „genau so viele“ rationale wie natürliche Zahlen!

Auf Georg Cantor (1845 - 1918) geht das Verfahren zurück, eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der natürlichen Zahlen zu konstruieren.

Jede rationale Zahl **r** läßt sich als Quotient zweier ganzer Zahlen schreiben:

$$\mathbf{r} = \frac{Z}{N}$$

und wir denken uns diese Quotienten aus Zähler und Nenner in Form dieses Tabellenschemas angeordnet.

Beispiel: $a_{4\,6} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$

Der Zusammenhang zwischen den Indexen n und m einerseits und **r** andererseits lautet:

$$Z = \begin{cases} \frac{1}{2}\cdot n & \text{für } n \text{ gerade} \\ -\frac{1}{2}\cdot(n-1) & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

$$N = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cdot m & \text{für } m \text{ gerade} \\ \frac{1}{2}\cdot(m+1) & \text{für } m \text{ ungerade} \end{cases}$$

Z	N	1	-1	2	-2	3	-3	4	-4	5	-5	6	-6	7	-7	8
0		$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{1\,3}$	$a_{1\,4}$	$a_{1\,5}$	$a_{1\,6}$	$a_{1\,7}$	$a_{1\,8}$	$a_{1\,9}$	$a_{1\,10}$	$a_{1\,11}$	$a_{1\,12}$	...		
1		$a_{2\,1}$	$a_{2\,2}$	$a_{2\,3}$	$a_{2\,4}$	$a_{2\,5}$	$a_{2\,6}$	$a_{2\,7}$	$a_{2\,8}$	$a_{2\,9}$	$a_{2\,10}$	$a_{2\,11}$	...			
-1		$a_{3\,1}$	$a_{3\,2}$	$a_{3\,3}$	$a_{3\,4}$	$a_{3\,5}$	$a_{3\,6}$	$a_{3\,7}$	$a_{3\,8}$	$a_{3\,9}$	$a_{3\,10}$	...				
2		$a_{4\,1}$	$a_{4\,2}$	$a_{4\,3}$	$a_{4\,4}$	$a_{4\,5}$	$a_{4\,6}$	$a_{4\,7}$	$a_{4\,8}$	$a_{4\,9}$	...					
-2		$a_{5\,1}$	$a_{5\,2}$	$a_{5\,3}$	$a_{5\,4}$	$a_{5\,5}$	$a_{5\,6}$	$a_{5\,7}$	$a_{5\,8}$	...						
3		$a_{6\,1}$	$a_{6\,2}$	$a_{6\,3}$	$a_{6\,4}$	$a_{6\,5}$	$a_{6\,6}$	$a_{6\,7}$	...							
-3		$a_{7\,1}$	$a_{7\,2}$	$a_{7\,3}$	$a_{7\,4}$	$a_{7\,5}$	$a_{7\,6}$	...								
4		$a_{8\,1}$	$a_{8\,2}$	$a_{8\,3}$	$a_{8\,4}$	$a_{8\,5}$	...			$a_{n\,m}$						
-4		$a_{9\,1}$	$a_{9\,2}$	$a_{9\,3}$	$a_{9\,4}$	...										
5		$a_{10\,1}$	$a_{10\,2}$	$a_{10\,3}$	...											
-5		$a_{11\,1}$	$a_{11\,2}$	...												
6		$a_{12\,1}$	...													
-6		...														
7																

Überlege:

– Wie bestimmt man demnach aus $a_{n\,m}$ die rationale Zahl **r**?
– Wie kann man nun rationale Zahlen natürlich anordnen, also abzählen?
– Wie verfährt man mit den „Doppelten“ (die nur ein anderes Zeichen für eine schon gezählte Zahl darstellen)?

Zur Abzählbarkeit der rationalen Zahlen

oder: ... es gibt „genau so viele“ rationale wie natürliche Zahlen!

<u>Nun zu dem etwas schwierigen Abzählverfahren:</u>

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	...	...
r	$a_{1\,1}$	$a_{1\,2}$	$a_{2\,1}$	$a_{1\,3}$	$a_{2\,2}$	$a_{3\,1}$	$a_{1\,4}$	$a_{2\,3}$	$a_{3\,2}$	$a_{4\,1}$	$a_{1\,5}$	$a_{2\,4}$	$a_{3\,3}$	$a_{4\,2}$	$a_{5\,1}$	$a_{1\,6}$	$a_{2\,5}$	$a_{3\,4}$	$a_{4\,3}$	$a_{5\,2}$	$a_{6\,1}$	...	...	...

Wir zählen nun die rationalen Zahlen entlang schräger Linien (von oben nach links) ab. Die erste Schräge besteht aus einer rationalen Zahl, die zweite Schräge aus 2, die dritte aus 3, die vierte aus 4, ... , wobei die Summe der Indexzahlen stets gleich ist, und zwar um 1 mehr als die Nummer der Schräge.

Wenn wir also z.B. bestimmen wollen, welche natürliche Zahl **k** der rationalen Zahl $\mathbf{a_{67\,91}}$ zugeordnet wird (das ist übrigens der Bruch: $\frac{-33}{46}$), so wissen wir aus der Summe der Indexzahlen, dass sich diese Zahl in der 157. Schräge befindet.

Bis zur 156. Schräge wurden: $\sum_{i=1}^{156} i = \frac{156 \cdot 157}{2} = 12246$ rationale Zahlen gezählt.

In der 157. Schräge beginnt es mit der Zahl $a_{1\,157}$, dann kommen $a_{2\,156}$, $a_{3\,155}$, ... , $\mathbf{a_{67\,91}}$, ... das sind noch einmal 67 Zahlen.

Damit gilt: **k** = 12313 , d.h. der Bruch $\frac{-33}{46}$ ist unsere 12313. rationale Zahl.