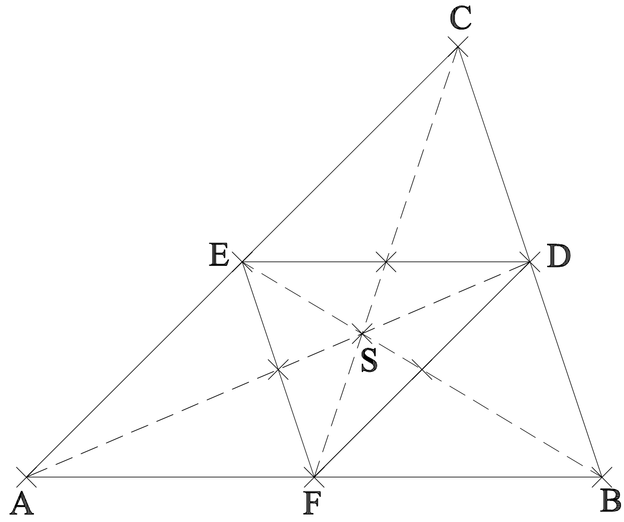
Das Mittendreieck

(Wie sich Bedeutungen verändern können)

1) Zeichne in dein Heft ein beliebiges, spitzwinkliges Dreieck (aber bitte nicht zu klein und keinen Sonderfall eines gleichschenkligen Dreiecks). Konstruiere die Mittelpunkte der 3 Dreiecksseiten und zeichne die 3 Seitenhalbierenden des Dreiecks ein, sowie durch Verbinden der Mittelpunkte das Mittendreieck, hier bezeichnet durch ΔDEF.

   Untersuche die Gesamtfigur auf besondere Eigenschaften (einige sollten dir schon bekannt sein) und versuche deine Entdeckungen zu begründen.

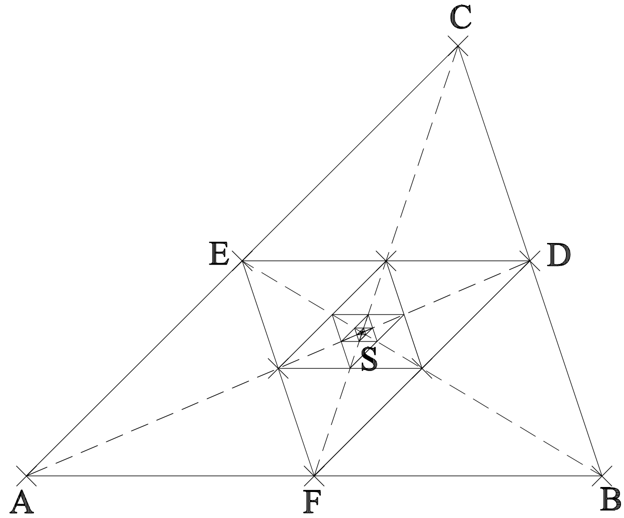


2) <u>Beweise:</u>

   Die Seitenhalbierenden des Dreiecks ΔABC schneiden die Seiten des Mittendreiecks ΔDEF in den jeweiligen Mittelpunkten, d.h. die Seitenhalbierenden des Mittendreiecks liegen auf den Seitenhalbierenden des Ausgangsdreiecks.

   Ein Mittendreieck kommt selten allein!

   Wie viele Dreiecke kannst du einzeichnen? - Alle besitzen **S** als Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, womit noch einmal gerechtfertigt erscheint, dass man **S** auch Schwerpunkt des Dreiecks ΔABC nennt.



---

3) Ergänze deine Konstruktion durch die 3 Mittelsenkrechten und die 3 Höhen im Dreieck ΔABC.

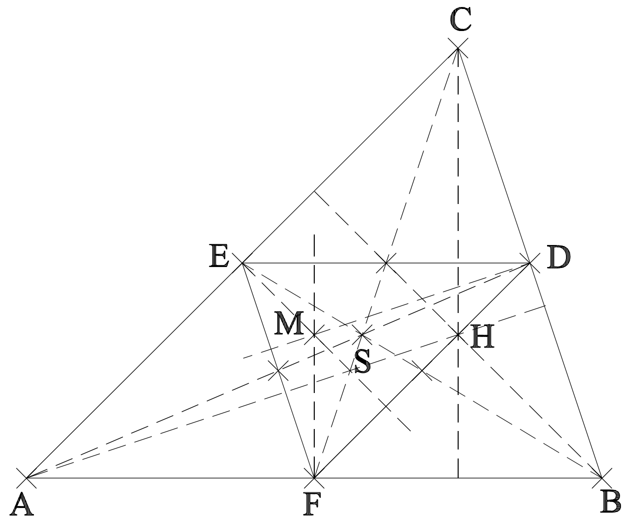
   <u>Begründe:</u>

   a) Die Mittelsenkrechten im Ausgangsdreieck ΔABC sind Höhen im Mittendreieck ΔDEF (z.B.: $m_{AB} = h_{ED}$).[1]

   b) $\overline{\sphericalangle SFM} = \overline{\sphericalangle SCH}$

   $\overline{FS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SC}$

   $\overline{FM} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CH}$



---

[1] Wir wollen hier, der Einfachheit halber, eine Höhe auch als Gerade auffassen und nicht als Strecke.

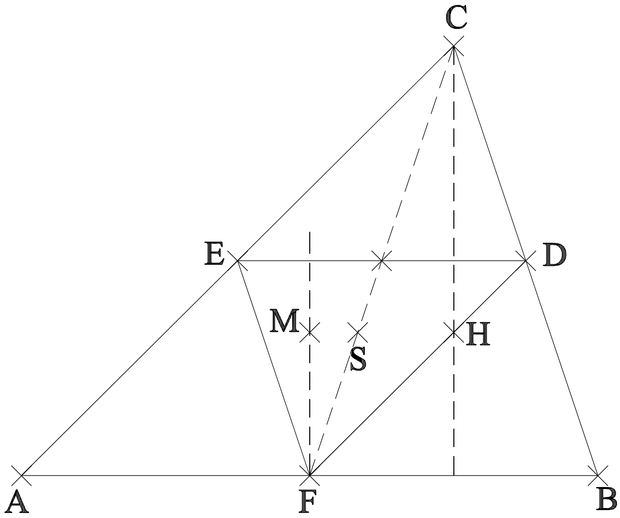
Das Mittendreieck

(Wie sich Bedeutungen verändern können)

Du hast dich bei Aufgabe 3) bestimmt an den Satz über die Mittelparallele im Dreieck (bzw. seinen Kehrsatz) erinnert![2]

Damit ist 3a) natürlich einfach zu begründen, weil m_{AB} gemeinsame Senkrechte der parallelen Strecken AB und ED ist.

$3b_1$) begründet sich damit über den Wechselwinkelsatz,
$3b_2$) ist richtig nach dem Satz über die Seitenhalbierenden, und
$3b_3$) gilt, weil jede entsprechende Strecke im Mittendreieck halb so groß ist wie die zugehörige Strecke im Ausgangsdreieck (FM und CH sind zugehörige Teile der Höhen in den Dreiecken ΔABC und ΔDEF).[3]



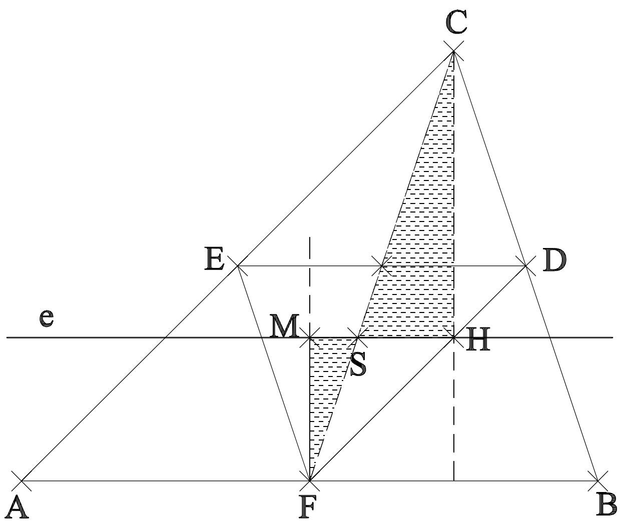
Nach den Begründungen von oben ist das Dreieck ΔSMF nur eine verkleinerte "Ausgabe" des Dreiecks ΔSHC (verhielten sich die Streckenlängen nicht wie 1:2 sondern wie 1:1 so würden wir sagen, dass die Dreiecke nach dem Kongruenzsatz SWS kongruent sind).

Insbesondere gilt: $\overline{\sphericalangle MSF} = \overline{\sphericalangle HSC}$.

Damit sind $\sphericalangle$MSF und $\sphericalangle$HSC gleich große Scheitelwinkel an der Seitenhalbierenden s_c, womit

M, **S**, und **H** *auf einer **Geraden** liegen*;

zusätzlich gilt: $\overline{\mathbf{MS}} = \frac{1}{2} \cdot \overline{\mathbf{SH}}$.



Die Gerade durch M, S und H heißt **Eulersche Gerade** [4] - Untersuche das Mittendreieck für den Fall eines stumpfwinkligen Dreiecks.
Gilt dann der obige Satz, dass M, S und H stets auf einer Geraden liegen und dass $\overline{MS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{SH}$ ist, in gleicher Weise? - Beachte, dass der Höhenschnittpunkt H <u>außerhalb</u> des Dreiecks liegen kann.

[2] $\left(E = M_{AC}\right) \wedge \left(g \text{ mit } \left(g \parallel AB \wedge M_{AC} \in g \right)\right) \Rightarrow \left(D = M_{BC}\right) \wedge \left(\overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB}\right)$

[3] In der nebenstehenden Skizze habe ich alle Hilfslinien der Übersichtlichkeit weggelassen, die zur Argumentation nicht notwendig sind.

[4] Leonard Euler, ✳ 15. April 1707 in Basel, ✝ 18. September 1783 in St. Petersburg