Kreis und Gerade

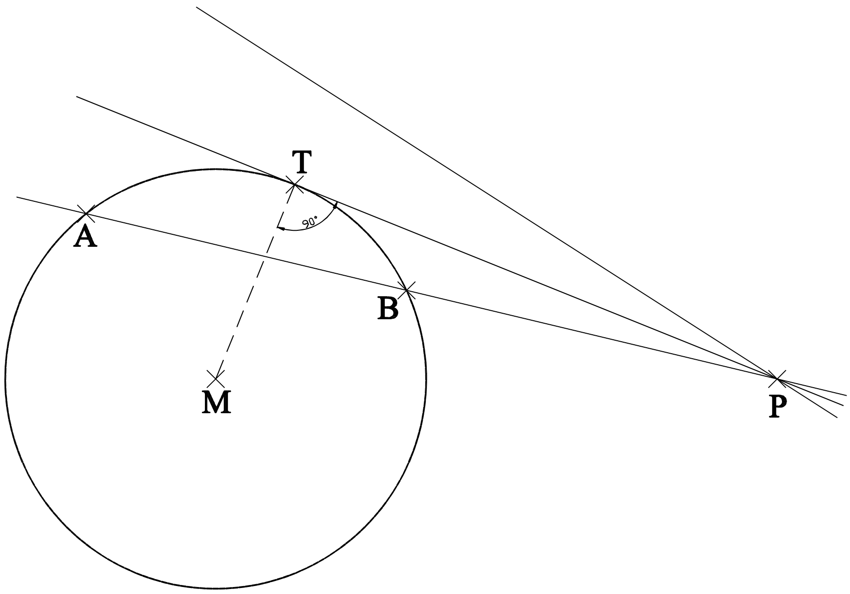
oder: ... Wozu benötigt man rechte Winkel ?

Es gibt drei wesentlich verschiedene Fälle von Geraden, bezogen auf einen gegebenen Kreis:

– Die Gerade ist eine Sekante, d. h. die Schnittmenge von Gerade und Kreis besteht aus zwei Punkten A und B (AB heißt Sehne).

– Die Gerade ist eine Passante, d.h. die Schnittmenge von Gerade und Kreis ist die leere Menge.

– Die Gerade ist eine Tangente, d.h. die Schnittmenge von Gerade und Kreis enthält genau ein Element, den Berührpunkt T der Tangente.

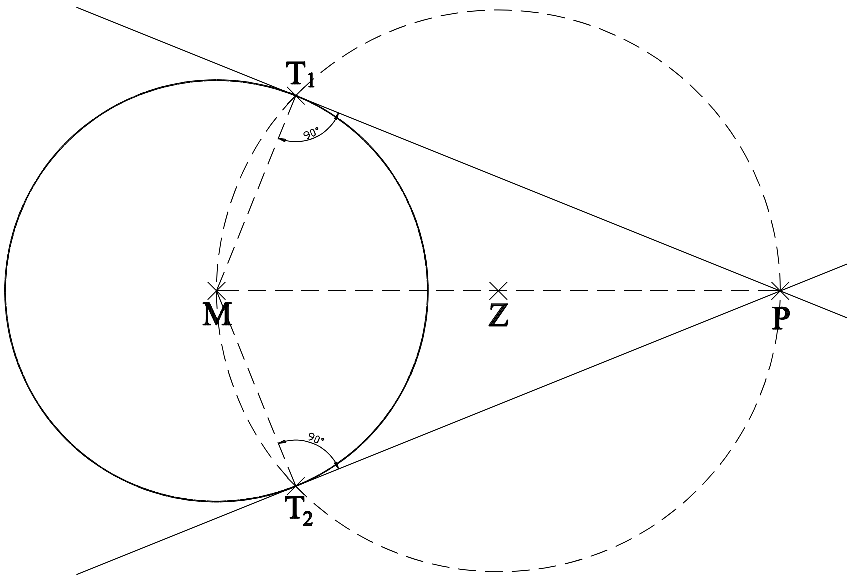


1) Zeichne in deinem Heft einen Kreis k(M ; r = 4 cm) und wähle einen beliebigen Punkt P außerhalb des Kreises. Konstruiere eine Tangente t mit $P \in t$, d.h. konstruiere den zugehörigen Berührpunkt $T \in k$.
<u>Tipp:</u> ΔMPT ist rechtwinklig.

....

Du hast dich sicher bei Aufgabe 1 an den Satz des Thales, den Spezialfall des Umfangswinkelsatzes erinnert und natürlich gibt es zwei Möglichkeiten, von einem Punkt P, außerhalb eines Kreises, eine Tangente an einen Kreis zu legen.

Wir variieren nun die Aufgabe ein wenig und betrachten nur noch den Kreis k (M ; r). Wir wählen auf dem Kreis einen beliebigen Punkt T.



2) Konstruiere in einem beliebigen Kreispunkt T eine Tangente nur mit Zirkel und Lineal (ohne Geodreieck).
<u>Tipp:</u> „Was der Mathematiker nicht hat, das holt er sich“ - Führe diese Aufgabe auf Aufgabe 1 zurück.

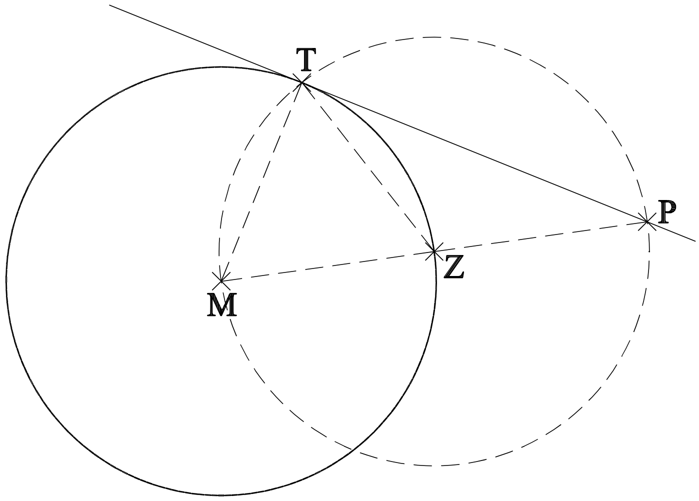
....

Kreis und Gerade

oder: ... Wozu benötigt man rechte Winkel ?

3) Begründe, dass die nebenstehende Konstruktion eine mögliche Lösung von Aufgabe 2 darstellt.

Fertige eine kurze Konstruktionsbeschreibung für die Lösung dieses Problems an.

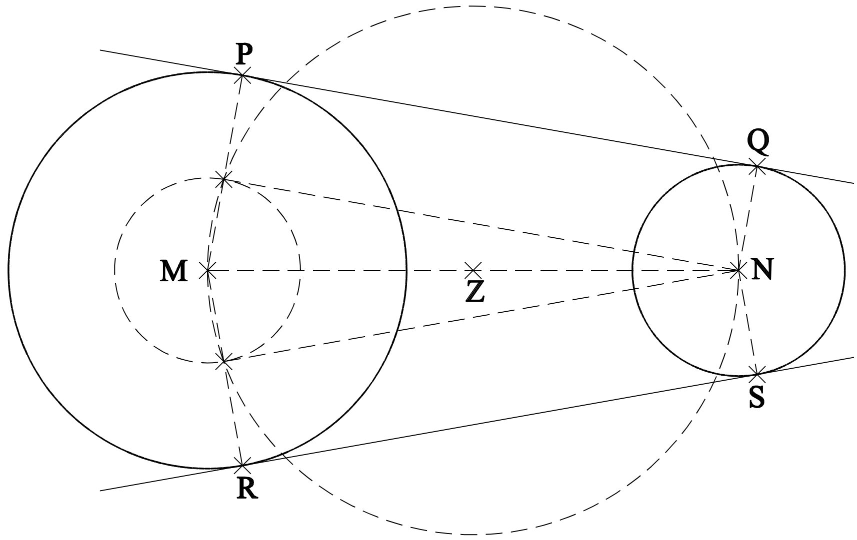


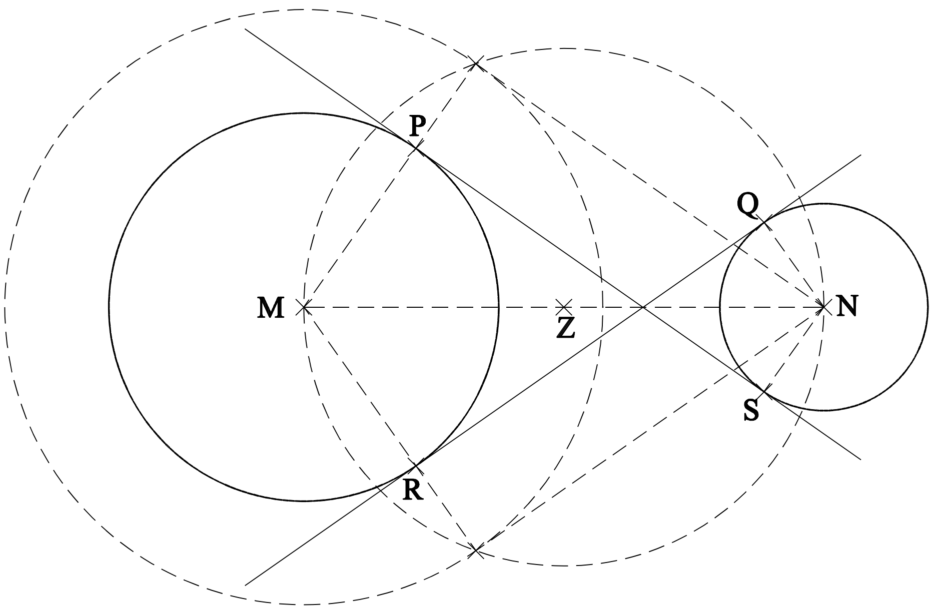
Etwas schwieriger ist der Sachverhalt, wenn man Tangenten an zwei Kreise mit unterschiedlicher Radiusgröße legen möchte.

4) Analysiere die nebenstehenden Konstruktionen und fertige eigene Konstruktionen mit folgenden Maßen an:

$r_1 := 4$ cm;
$r_2 := 2{,}5$ cm;
$\overline{MN} := 9$ cm

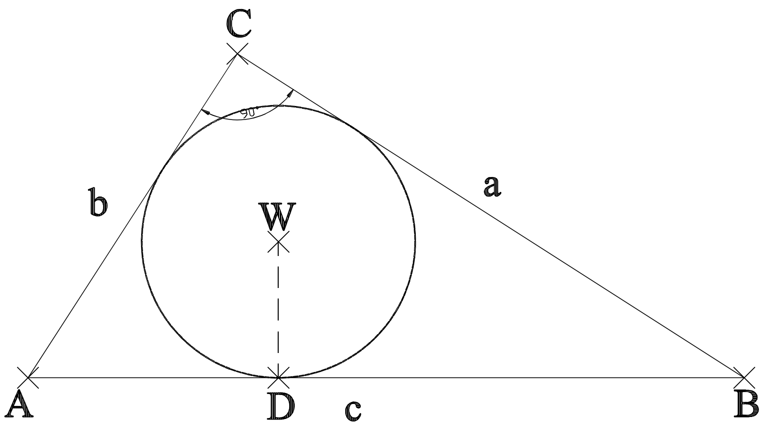
Tipp: Achte auf die eingezeichneten Hilfskreise, insbesondere auf deren Radiusgrößen.





---

5) Zeichne ein rechtwinkliges Dreieck mit den Maßen a := 8 cm und b := 5 cm.[1]



Konstruiere nun den Innenkreis dieses Dreiecks und bestimme durch Messung einen möglichst genauen Näherungswert für die Größe des Radius WD dieses Kreises.

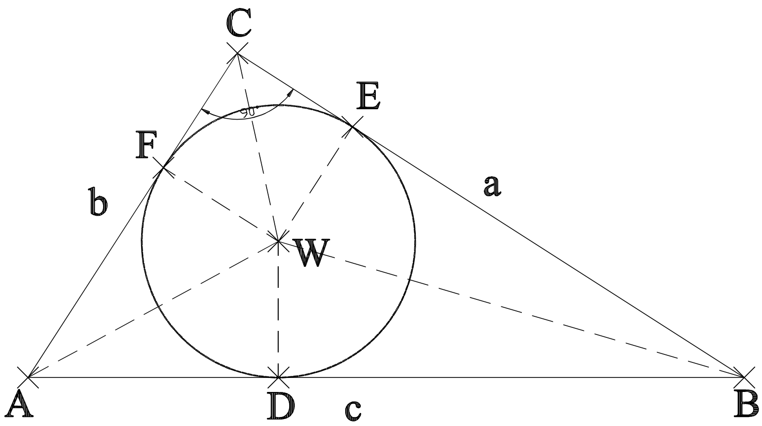
Bestimme auch durch Messung einen Näherungswert für die Länge der Dreiecksseite AB.

$\overline{WD} \approx$ $\overline{AB} \approx$

Die Maße der drei Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks und die Radiusgröße des Innenkreises stehen in einem gewissen Zusammenhang. - Kannst du sagen in welchem?

....

6) <u>Beweise:</u>



Wenn ein Dreieck rechtwinklig ist ($\overline{\gamma} = 90°$), dann gilt:

$$\boxed{a + b = c + 2 \cdot r_i}$$

<u>Anmerkung:</u>

Dieser Sachverhalt ist schon erstaunlich. Sicher gilt bei jedem Dreieck die Dreiecksungleichung: $a + b \geq c$. Addiert man zur Länge der Grundseite bei einem rechtwinkligen Dreieck jedoch die Größe des Durchmessers des Innenkreises, dann gilt immer die Gleichheit.

<u>Tipp:</u> Achte in der durch Hilfslinien ergänzten Figur auf kongruente Dreiecke und beachte insbesondere das Viereck □WECF.

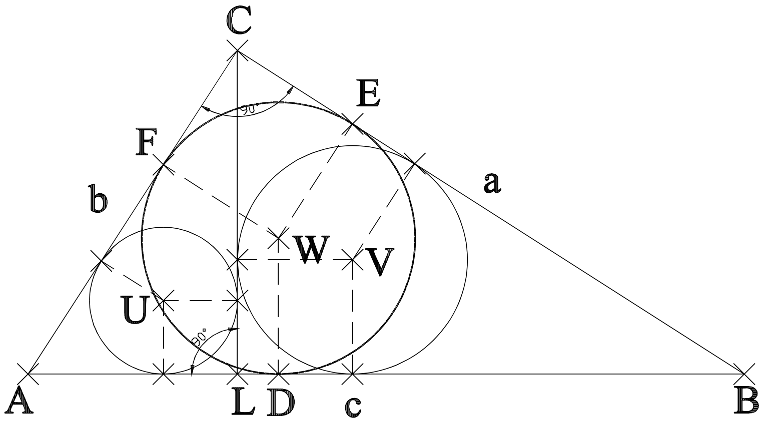
<u>Beweis:</u>

Überprüfe den Sachverhalt an einem weiteren, selbstgewählten Beispiel als Hausaufgabe.

[1] Bei einem rechtwinkligen Dreieck heißen die beiden kürzeren Seiten Katheten, die längste Seite Hypothenuse.

7) Zeichne erneut ein rechtwinkliges Dreieck mit den Maßen a := 8 cm und b := 5 cm.

Fälle von dem Punkt C ein Lot auf die Grundseite AC, d.h. teile das Dreieck ΔABC in zwei rechtwinklige Dreiecke ΔALC und ΔLBC.



Konstruiere in den drei rechtwinkligen Dreiecken die drei Innenkreise und bestimme durch Messung Näherungswerte für die drei Radien der Innenkreise. - Diese drei Radien stehen in einem bestimmten Zusammenhang, bezogen auf Maße des Ausgangsdreiecks. Kannst Du sagen in welchem Zusammenhang?

$r_W \approx$ $r_U \approx$ $r_V \approx$

<u>Beweise:</u>

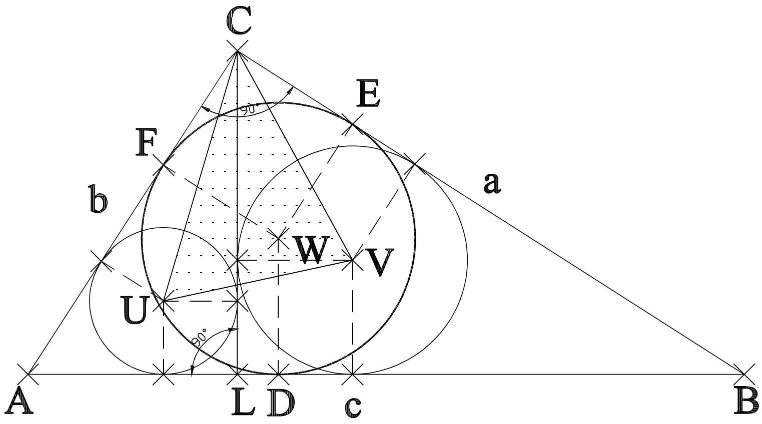
$$\boxed{r_U + r_V + r_W = h_c \left(= \overline{LC}\right)}$$

Tipp: Verwende unser Ergebnis von Aufgabe 6 in allen drei rechtwinkligen Dreiecken und kombiniere die Gleichungen geeignet.

Nun kommt noch etwas für wirklich gute Leute.

8) Kennzeichne das Dreieck ΔUVC und untersuche die Gesamtfigur auf Besonderheiten. - Schon etwas entdeckt?

Sieh dir die besondere Lage von W, bezogen auf dieses Dreieck an!



Es sieht bei mir so aus, als sei W der Höhenschnittpunkt im Dreieck ΔUVC. - Ursprünglich wurden W, U und V ja als Schnittpunkte von Winkelhalbierenden in den Dreiecken ΔABC, ΔALC und ΔLBC konstruiert. Zusätzlich gibt es viele rechte Winkel und es gilt der Winkelsummensatz in Dreiecken und ..... .
Kannst du die Höhenschnittpunktseigenschaft von W im Dreieck ΔUVC begründen?

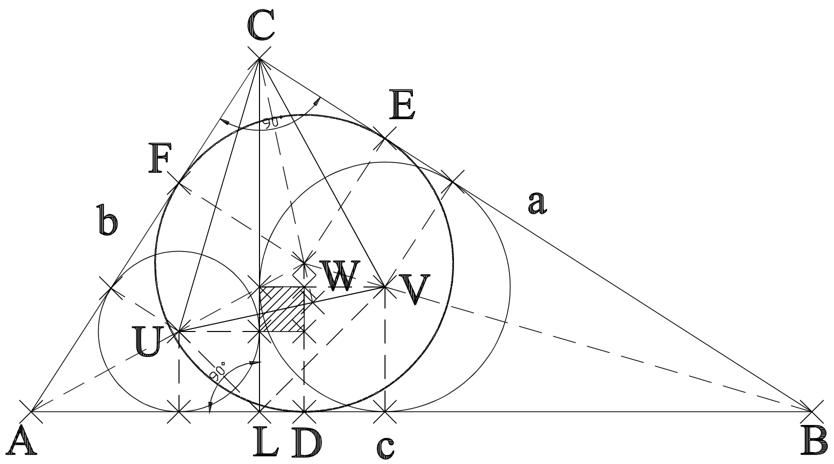
Kreis und Gerade

oder: ... Wozu benötigt man rechte Winkel ?

In der nebenstehenden Skizze wurden noch ein paar Hilfslinien eingezeichnet.

<u>Begründe:</u>

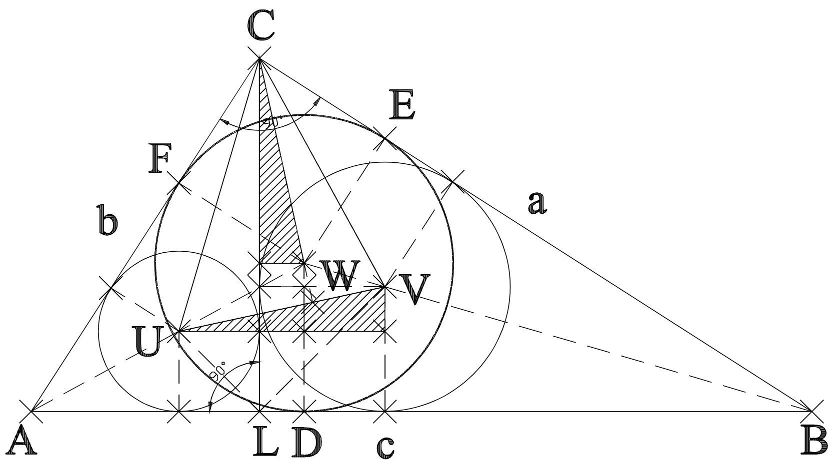
Das kleine schraffierte Viereck ist ein Quadrat und die Länge der Seiten beträgt: $r_V - r_U$. - Versuche bei Schwierigkeiten Probleme der Begründung zu benennen.



<u>Begründe:</u>

Die beiden schraffierten Dreiecke sind kongruent.

<u>Tipp:</u> Kongruenzsatz SWS; beachte das Ergebnis von Aufgabe 7.



Damit wissen wir:

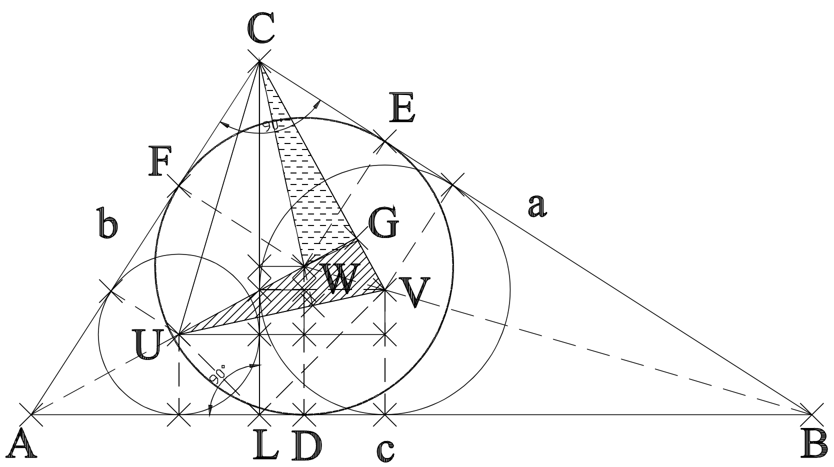
$$\overline{CW} = \overline{UV}$$

$$\wedge \quad g(C;W) \perp g(U;V)$$

womit CW auf einer Höhe im Dreieck ΔUVC liegt.

Um noch zu zeigen, dass auch UW auf einer Höhe des Dreiecks ΔUVC liegt könnte man UW bis zu einem Schnittpunkt G mit CV verlängern.

Wenn man nun begründen könnte, dass die beiden gekennzeichneten Dreiecke kongruent und rechtwinklig sind, dann wäre auch dies bewiesen. (Tipp: Kongruenzsatz WSW)



Du weißt: $\overline{\alpha} + \overline{\beta} = 90°$ und vielleicht gelingt es dir zu zeigen, dass z.B. $\overline{\sphericalangle GVU} = \overline{\sphericalangle GWC}$ ist. - Wer diesen letzten Aufgabenteil noch schafft: Bravo!