Grundkonstruktionen und Linien im Dreieck

Auf den Spuren von Leonhard Euler

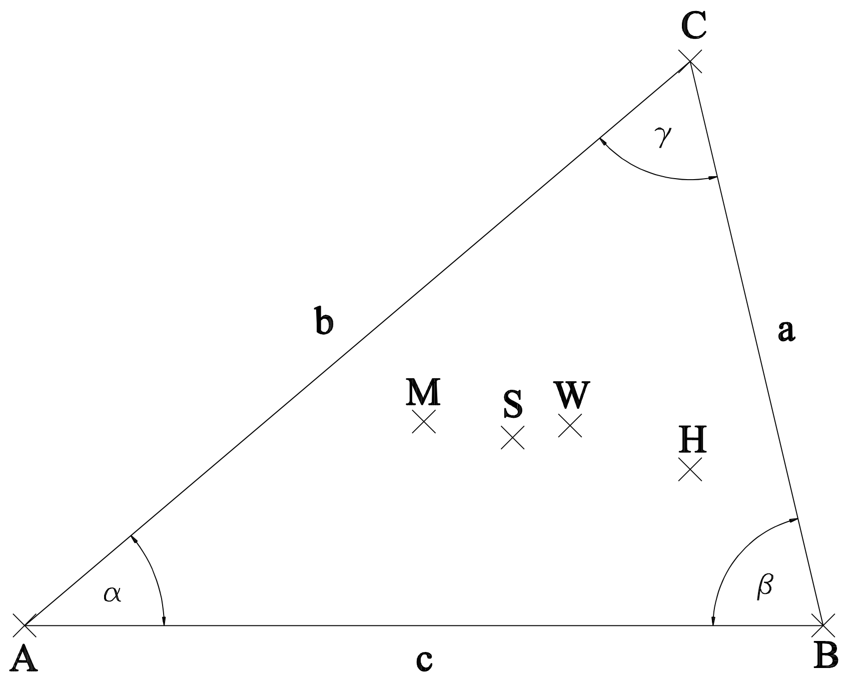
Bekanntlich gibt es 4 Grundkonstruktionen, gefunden von den "Meistern" im alten Griechenland, die nur mit Zirkel und Lineal ausgeführt werden können, und die mit speziellen Linien im Dreieck korrespondieren:

Grundkonstruktion	Linie im Dreieck (z.B.: ..)	Beispielhafte Eigenschaft
Halbieren einer Strecke	Seitenhalbierende ($\mathbf{s_c}$)	$(M_{AB} \in \mathbf{s_c}) \wedge (C \in \mathbf{s_c})$
Errichten einer Senkrechten	Mittelsenkrechte ($\mathbf{m_{AB}}$)	$(M_{AB} \in \mathbf{m_{AB}}) \wedge (\mathbf{m_{AB}} \perp AB)$
Fällen eines Lotes	Höhe ($\mathbf{h_c}$)	$(C \in \mathbf{h_c}) \wedge (\mathbf{h_c} \perp AB)$
Halbieren eines Winkels	Winkelhalbierende ($\mathbf{w_\gamma}$)	$(C \in \mathbf{w_\gamma}) \wedge (\overline{\sphericalangle(b,\mathbf{w_\gamma})} = \overline{\sphericalangle(\mathbf{w_\gamma},a)})$

1) Beschreibe (im Heft) in mathematischer Formelsprache die Eigenschaften der jeweils anderen (nicht beispielhaft angegebenen) Linien im Dreieck.

---

2) In der folgenden Graphik sind alle Hilfslinien der Konstruktion verloren gegangen, doch der Schüler A. Made behauptet, **S** sei der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden, **M** sei der Schnittpunkt der Mittelsenkrechten, **H** sei der Schnittpunkt der Höhen und **W** sei der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden. Bestätige oder widerlege die Behauptung durch Konstruktion von jeweils mindestens 2 der 3 bestimmenden Linien nur mit Zirkel und Lineal.



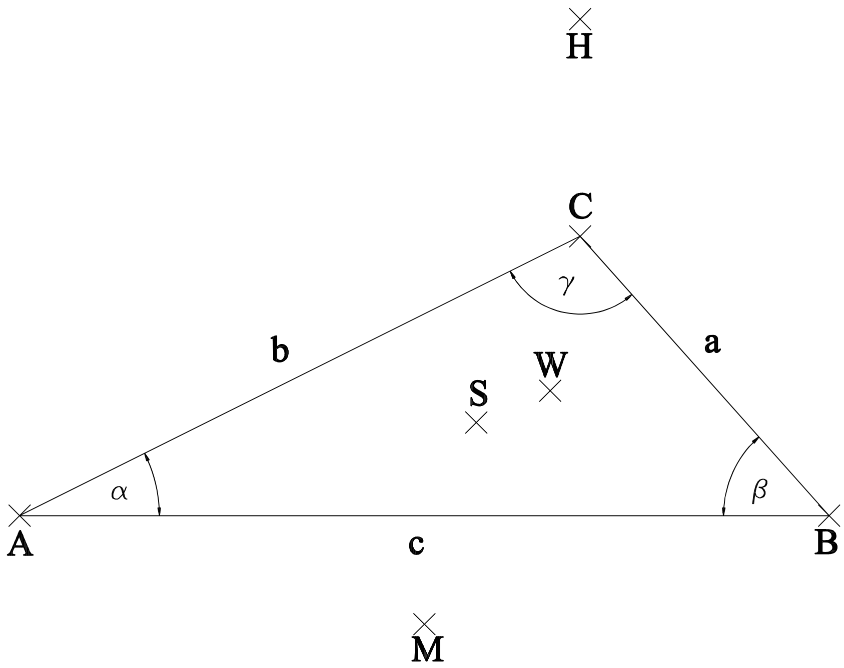
Kannst du etwas über die (spezielle) Lage von **S**, **M**, **H** und **W** aussagen ?

Grundkonstruktionen und Linien im Dreieck

Auf den Spuren von Leonhard Euler

Leonhard Euler hat entdeckt und bewiesen: In einem Dreieck liegen der Schnittpunkt **S** der Seitenhalbierenden, der Schnittpunkt **M** der Mittelsenkrechten und der Schnittpunkt **H** der Höhen stets auf einer Geraden, der **Eulerschen Geraden**.[1]

3) Überprüfe die Aussage des Satzes im vorherigen Dreieck und stelle durch Konstruktion wie bei Aufgabe 2 fest, ob dies auch für den Fall richtig ist, dass das Dreieck stumpfwinklig ist.



Was passiert eigentlich, wenn das Dreieck gleichschenklig, oder sogar gleichseitig ist?

4) Bei den folgenden Sätzen hat A. Made wohl Einiges durcheinander gebracht. - Formuliere eigene, richtige Sätze und begründe deine Entscheidung.

a) Jeder Punkt einer Seitenhalbierenden ist gleichweit von den Eckpunkten entfernt; deshalb verlaufen alle Seitenhalbierenden durch einen Punkt **S** und dieser Punkt **S** ist der Mittelpunkt des Innenkreises .

b) Fasst man ein Dreieck als Mittendreieck eines anderen (äußeren) Dreiecks auf, so sind die Winkelhalbierenden des Mittendreiecks die Höhen im äußeren Dreieck. Weil sich die Winkelhalbierenden in einem Punkt schneiden, schneiden sich auch die Höhen in einem Punkt.

c) Der Höhenschnittpunkt **H** teilt jede Höhe im Verhältnis 2 : 1 und zwar ist der Abstand zur Seite stets doppelt so groß wie der Abstand zur Ecke.

d) Jeder Punkt einer Mittelsenkrechten ist gleichweit von den anderen Dreiecksseiten entfernt, deshalb verlaufen alle Mittelsenkrechten durch einen Punkt **M** und dieser Punkt **M** ist der Schwerpunkt des Dreiecks .

[1] Der exakte Beweis des Satzes ist nicht ganz einfach. - Wer war eigentlich Leonhard **Euler** ? - Informiere dich in geeigneter Literatur oder Recherche im Internet!