

In größerer Serie werden 4 verschiedene Schmuckstücke S_1, \dots, S_4 produziert, die neben der Fassung aus unterschiedlichen Edelsteinanteilen an Diamanten **D**, Smaragden **S**, Rubinen **R** und Saphiren **Sp** bestehen. An Kosten bei der Herstellung müssen die spezifischen Einkaufspreise **E**, der unterschiedliche Arbeitsaufwand **A**, sowie der unterschiedliche Bedarf an Material und Maschinen bei der Bearbeitung **M** für die verschiedenen Edelsteinsorten Berücksichtigung finden.

(Bemerkung: Edelsteine einer Sorte werden in Güte und Gewicht genormt vorausgesetzt.!)

Die anzahlmäßigen Anteile geben die folgenden Übersichten:

S_1 : 1D	2R	D: 5E	1,5A	2,0M	
S_2 : 2D	1S	1Sp	S: 8E	1,0A	1,5M
S_3 : 1D	1R	2Sp	R: 4E	2,0A	1,5M
S_4 : 2D	1S	1R	Sp: 6E	1,0A	1,0M

; (in 100 DM)

a) Beschreiben Sie den oben benannten Sachverhalt durch 2 lineare Abbildungen **f** und **g**, indem Sie zunächst geeignete Vektorräume, bzw. deren Basen, definieren und dann die zugehörigen Matrizen **A_f** und **B_g** nennen. Welche Bedeutung haben die Spalten der Matrizen?

b) Begründen Sie, warum die Matrizenmultiplikation (Verknüpfung) im allgemeinen nicht kommutativ ist.

c) Geben Sie die Matrix zur Abbildung vom Vektorraum der Schmuckstücke in den Vektorraum der Kosten an und berechnen Sie mit dieser Matrix die jeweiligen Kosten für eine Produktion von:
 100 **S₁**, 50 **S₂**, 50 **S₃** und 50 **S₄**.

d) Beweisen Sie: Eine der linearen Abbildungen (**f** oder **g**) ist umkehrbar, die andere nicht!

e) Berechnen Sie für die umkehrbare Abbildung die inverse Matrix! (Ergebnis: $\begin{pmatrix} 3 & -5 & -1 & -1 \\ 4 & -6 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$)

f) Ein Sonderposten von 75 **D**, 20 **S**, 65 **R** und 40 **Sp** konnte besonders preiswert eingekauft werden. Wie viele Schmuckstücke jeder Sorte könnten damit gefertigt werden, wenn alle Steine verarbeitet werden sollen?

g) Da sich Schmuckstücke mit Rubinen im Moment besonders gut verkaufen lassen wird erwogen, zu dem in Teil f) benannten Sonderposten noch weitere Rubine von einem anderen, teureren Lieferanten dazuzukaufen. Dies wäre jedoch nur sinnvoll, wenn weiterhin alle Steine verarbeitet werden können, d.h. wenn kein "totes Kapital" entsteht. Wie viele Rubine können unter dieser Prämisse maximal noch dazugekauft werden, und welche Schmuckstücke werden dann in welcher Anzahl gefertigt?