# Mathematik

**im**

## mathematisch - naturwissenschaftlichen Profil der Sekundarstufe 2

(ohne das Halbjahr 13/2)

## <u>ma-F</u> : Analysis ( 90 Stunden )

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 10 | **Reelle Zahlenfolgen, Häufungspunkte und Grenzwerte (25 Std.)**<br>• Reelle Zahlenfolgen als spezielle Funktionen von $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$<br>• Veranschaulichung von Folgen auf der Zahlengeraden<br>• Beschränktheit und Monotonie von Folgen<br>• Grenzwert, Konvergenz einer Folge, Häufungswerte, konvergente Teilfolgen einer Folge mit Häufungswerten, Beschränktheit einer konvergenten Folge<br>• Nachweise dafür, dass eine vermutete Zahl tatsächlich Grenzwert einer gegebenen Folge ist mit Hilfe der Grenzwertdefinition | Es bietet sich an, exemplarisch rekursive und explizite Darstellungen von Folgen gegenüberzustellen (u.a. für geometrische Folgen, geometrische Reihen (Summenformel)) und so eine Verbindung zum Gebiet „Prinzip der Vollständigen Induktion“ zu knüpfen.<br>Es sollten logische Zusammenhänge zwischen den Begriffen Grenzwert und Häufungswert einer Folge diskutiert und ein Ausblick auf sowohl bestimmt als auch unbestimmt divergente Folgen gegeben werden.<br>Aus Zeitgründen sollte man sich auf instruktive Beispiele beschränken. |
| 10 | • Konvergenzkriterium von Cauchy<br>• Einschachtelungssatz für konvergente Zahlenfolgen<br>• Supremum und Infimum einer Menge reeller Zahlen<br>• Charakterisierung der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ mittels des Satzes (bzw. Axioms) über die Existenz des Supremums bzw. Infimums einer nach oben bzw. unten beschränkten reellen Menge, Hinweis auf die Äquivalenz dieser Charakterisierung zum Intervallschachtelungsaxiom (ohne Beweis)<br>• Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$ | Der Beweis stellt eine instruktive Anwendung der Konvergenzdefinition für Folgen dar.<br>In diesem Zusammenhang sollte wiederholend (Klasse 9) auf den Vergleich von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ eingegangen werden (Dichtheit, Abzählbarkeit, Nichtvollständigkeit von $\mathbb{Q}$; Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$). |
| 5 | • Grenzwertsätze für konvergente Folgen (Summe, Differenz, Produkt, Quotient)<br>• Konvergenzkriterium für monotone Folgen | Der Nachweis eines Grenzwertsatzes genügt.<br>Anwenden der Grenzwertsätze für den Konvergenznachweis bzw. die Ermittlung von Grenzwerten für Folgen.<br>Als Beispiele für konvergente bzw. divergente Folgen sollten auch Partialsummenfolgen, d.h. Reihen herangezogen werden. |
| 10 | **Ganzrationale Funktionen, Stetigkeit, Ableitung (20 Std.)**<br>• Reelle Nullstellen ganzrationaler Funktionen (Polynomdivision, Faktorisierung von Polynomen) im Zusammenhang mit ihrer graphischen Darstellung (vorerst ohne Differentialrechnung) | Nullstellenermittlung durch Lösung quadratischer und biquadratischer Gleichungen (auch mit Parametern) sowie durch Abspalten von Linearfaktoren. |

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| | • Stetigkeit von Funktionen an einer Stelle (vorerst Folgendefinition) und auf ihrem Definitionsbereich (insbesondere ganzrationaler Funktionen) | In diesem Zusammenhang sollten als Gegenbeispiele auch überschaubare Unstetigkeitsstellen einfacher Funktionen untersucht und graphisch veranschaulicht werden. |
| | • Nullstellensatz, Zwischenwertsatz, Satz vom Maximum/Minimum | Begründung, dass jede ganzrationale Funktion ungeraden Grades mindestens eine reelle Nullstelle besitzt. |
| 10 | • Ableitung einer Funktion an einer Stelle als Grenzwert von Differenzenquotientenfolgen | Die drei Aspekte der 1. Ableitung sollten anschaulich herausgearbeitet werden:<br>1. Tangentenanstieg an der entsprechenden Stelle,<br>2. lokale Änderungsrate (z.B. Momentangeschwindigkeit bei einem Weg-Zeit-Gesetz),<br>3. lineare Approximierbarkeit der Funktion an der entsprechenden Stelle. |
| | • Zusammenhang Stetigkeit - Differenzierbarkeit | An einer Stelle stetige, jedoch nicht differenzierbare Funktionen sollten angesprochen werden. |
| | • Begriff der Ableitungsfunktion | Zu vorgegebenen Funktionen die Ableitungsfunktion ermitteln und graphisch darstellen. |
| | • Zusammenhang zwischen dem Monotonieverhalten einer Funktion und dem Vorzeichen der 1. Ableitung (vorerst anschaulich) | Vergleich der Graphen von $f'$ und $f''$. |
| | • Ableitungsregeln:<br>$(c)' = 0$ , $(x)' = 1$<br>$(x^n)' = n\cdot x^{n-1}$ ; $n\in\mathbb{N}\setminus\{0;1\}$<br>$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$<br>$(c\cdot f(x))' = c\cdot f'(x)$ | Als Anwendung: Ableitung ganzrationaler Funktionen. |
| 10 | **Untersuchungen ganzrationaler Funktionen** | |
| | • Relative Extrema einer Funktion, Hoch- und Tiefpunkte, Krümmungsverhalten und Wendepunkte eines Funktionsgraphen mit entsprechenden notwendigen und hinreichenden Kriterien (auch Vorzeichenkriterium) für deren Existenz bei differenzierbaren Funktionen | Es sollte verdeutlicht werden, dass diese Begriffsbildungen nicht an die Differenzierbarkeit der entsprechenden Funktionen gebunden sind.<br>Beim Beweis der hinreichenden Kriterien kann man sich auf den globalen Monotoniesatz stützen (anschaulich), der erst in MA-12/1 mit Hilfe des 1. Mittelwertsatzes der Differentialrechnung bewiesen wird. |
| | • Absolute Extrema einer Funktion auf einer Menge, Extremwertaufgaben, die auf ganzrationale Zielfunktionen führen | |
| | • Untersuchung ganzrationaler Funktionen (Achsenschnittpunkte, Hoch-, Tief- und Wendepunkte, Monotonieintervalle, Symmetrie) | |
| | • Newtonverfahren | An die Betrachtung hinreichender Bedingungen für die Konvergenz ist nicht gedacht. |

**ma-F : Analysis** **( 90 Stunden )**

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 15 | **Grenzwerte von Funktionen, Weiterführung der Stetigkeit**<br>• Grenzwertuntersuchungen (insbesondere an Definitionslücken)<br>• Übertragung der Grenzwertsätze für Folgen auf solche für Funktionen<br>• Stetigkeit einer Funktion an einer Stelle ( $\varepsilon$ - $\delta$ - Charakterisierung)<br>• Stetigkeit ausgewählter Funktionen auf ihrem Definitionsbereich<br>• Stetige Fortsetzbarkeit<br>• Verknüpfung stetiger Funktionen (einschließlich Verkettung)<br>• Stetige Differenzierbarkeit | Für Funktionsterme wie: $\frac{x^2-1}{x+1}$, $\frac{\lvert x\rvert}{x}$, $\frac{\sin(x)}{x}$, $\frac{\cos(x)-1}{x}$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, $x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ...<br><br>Für die Äquivalenz der Folgendefinition mit der $\varepsilon$ - $\delta$ - Charakterisierung sollte anschauliches Verständnis erreicht werden.<br><br>z.B. Winkelfunktionen. Es sind auch Beispiele für nicht stetige bzw. nicht stetig fortsetzbare Funktionen zu behandeln. |
| 10 | **Weiterführung der Differentialrechnung (20 Std.)**<br>• Ableitung trigonometrischer Funktionen<br>• Produkt-, Quotienten- und Kettenregel<br>• Ableitung der Umkehrfunktion<br>• Ableitung von $x^r$ ; $r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ | Die Ableitung von cos, tan, cot kann auf die Ableitung von sin gestützt werden.<br><br>Wiederholung zu Umkehrfunktionen aus Klasse 10, graphische Darstellung von f und $f^{-1}$ . |
| 10 | • Extremwert- und andere Anwendungsaufgaben (Physik, Technik) zu den bisher behandelten Funktionenklassen | Komplexe Übungen in Anwendungssituationen zu den bisher behandelten Funktionenklassen und Verfahren. |

## <u>ma-F</u> : Lineare Algebra und Analytische Geometrie ( 30 Stunden )

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 10 | **Vektorraum (20 Std.)**<br><br>• Struktur eines Vektorraumes<br><br>• Linearkombination, Erzeugendensystem, Lineare Hülle<br><br>• Basen als minimale Erzeugendensysteme, Lineare Unabhängigkeit | Vektorraumstruktur z.B. aus der Lösungsmenge einer linearen Gleichung in 3 Variablen.<br><br>Neben dem exemplarischen Einstiegsbeispiel eines Vektorraumes sollten in der Folge weitere Beispiele, z.B. Funktionenräume behandelt werden.<br><br>Auf geometrische Interpretationen sollte an dieser Stelle noch bewusst verzichtet werden, um den Begriff des Vektors bei den Schülern allgemeiner zu verankern.<br><br>Es empfiehlt sich, in Schreibweisen Zeilen und Spalten sauber zu unterscheiden. |
| 10 | • Eindeutigkeit der Darstellung (Spalten) bzgl. fester Basis (Basiswechsel - kanonische Basis)<br><br>• Unterräume, Dimension (Austauschsatz, Basisergänzungssatz) | |
| 10 | **Lineare Gleichungssysteme (LGS)**<br><br>Lösungsmengenbestimmung über das Gauß-Verfahren im homogenen und inhomogenen Fall (Zusammenhang: Lösungsmenge eines inhomogenen und des zugehörigen homogenen Systems)<br><br>Aus Beispielen: Propädeutische Fassung des Dimensionssatzes (Rang eines LGS als maximale Anzahl linear unabhängiger Spaltenvektoren; Dimension der Lösungsmenge als Anzahl der frei wählbaren Variablen) | Hier, in Klasse 11, steht das rechentechnische Verfahren im Vordergrund. Die wesentlich verschiedenen Fälle der Lösungsmengen sollen sich aus geeigneten Beispielen ergeben.<br><br>Der Dimensionssatz wird in Kl. 12 im Zusammenhang mit Linearen Abbildungen wieder aufgegriffen und vertieft. |

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 15 | **Prinzip der vollständigen Induktion**<br><br>Anwendungen u.a.:<br><br>• Summenformeln<br>• Binomischer Satz<br>• Teilbarkeitsaussagen<br>• Ungleichungen<br>• rekursiv definierte Folgen | Bei den Ungleichungen ist auf jeden Fall zu behandeln:<br><br>• Bernoullische Ungleichung<br>• Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel |
| 10 | **Algebraische Strukturen**<br><br>• Begriffe: Gruppe, Ring, Körper, Anordnung ($\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ als angeordnete Körper)<br><br>• Als Folgerungen aus den Gruppenaxiomen Nachweis der Eindeutigkeit des neutralen Elements, der Eindeutigkeit der inversen Elemente und der Eigenschaft $(h^{-1})^{-1} = h$ | Es bietet sich an, neben den Zahlbereichen weitere Beispiele zur Festigung der Begriffsbildung, z.B. der Gruppe, zu behandeln. |
| 20 | **Komplexe Zahlen**<br><br>Gaußsche Zahlenebene als Modell für $\mathbb{C}$ (Einbettung von $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$)<br>Rechnen in $\mathbb{C}$, verbunden mit der zugehörigen geometrischen Interpretation<br><br>• Addition - Subtraktion,<br>• Multiplikation (Polarkoordinaten)-Division (Inversenbildung - Konjugation)<br>• Wurzeln - Potenzen (Satz von Moivre), n-te Einheitswurzeln/Kreisteilung<br>• Lösung quadratischer Gleichungen mit komplexen Koeffizienten<br><br>Faktorisierung von Polynomen mit reellen Koeffizienten über $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}$ (Fundamentalsatz der Algebra - Primpolynome) | Bei der Bestimmung von Wurzeln: Übergang zu Polarkoordinaten,<br><br>Hier bietet sich der Einsatz eines geeigneten Computerprogramms zur Bestimmung von Nullstellen an, ein exakter Beweis kann nicht geführt werden. |
| | *In diesem Lernabschnitt mit 15 Stunden ist eine der drei folgenden Varianten zu wählen.*<br><br>**Einführung in die lineare Optimierung**<br><br>• Ein ganzzahliges lineares Optimierungsproblem<br><br>• Einführung in Grundbegriffe der Graphentheorie: Graph, Kanten, Knoten, Quelle, Senke<br><br>• Darstellung und Lösung des ursprünglichen Optimierungsproblems mit Hilfe von Graphen | Beispiel eines zeitoptimalen Verkehrsweges.<br>Als historisch interessanter Einstieg kann das Königsberger Brückenproblem gewählt werden.<br><br>Anwendungsbeispiele: Optimierung von Zeit, Strecken, Kosten |

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| | **Inversion am Kreis** | |
| | • Inversion am Kreis: Definition, einfache Eigenschaften; Abbildungsgleichung im Koordinatensystem mit Polar- und kartesischen Koordinaten | Bei der Inversion im Koordinatensystem sollte grundsätzlich der Mittelpunkt des Inversionskreises im Ursprung liegen. |
| | • Abbildung einfacher Figuren durch Kreisinversion | Beispiele: Geraden, Kreise, Hyperbel, Parabel |
| | • Kurven in Polarkoordinatendarstellung, ihre Bilder bei Kreisinversion bzw. ihre Erzeugung durch Kreisinversion | Beispiele: Kreis, Ellipse, Parabel, Pascalsche Schnecke, Lemniskate, Kardioide, Zissoide, Strophoide |
| | **Weitere Eigenschaften von Gruppen** | |
| | Weitere Beispiele für kommutative und nichtkommutative Gruppen:<br>(Arithmetische Beispiele, Gruppe der n-ten Einheitswurzeln, Permutationsgruppen, Symmetriegruppen, Drehgruppen, Restklassengruppen,... )<br>Ablesen bekannter Gruppeneigenschaften (außer Assoziativität) aus den Gruppentafeln | Ziel ist es, weitere Modelle für Gruppen aus unterschiedlichen Objektbereichen zu finden, um vielfältiges Material für anschließende Strukturvergleiche bereitzustellen.<br>Es sollten auch Gegenbeispiele diskutiert werden (algebraische Strukturen, welche keine Gruppen sind, z.B. Halbgruppen,...). |
| | • Weitere Gruppeneigenschaften :<br>1. In jeder Gruppe sind Gleichungen der Form $a \circ x = b$ und $y \circ a = b$ stets eindeutig lösbar.<br>2. $( a \circ b )^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$<br><br>• Begriffe: Zyklische Gruppe, erzeugendes Element, Ordnung einer endlichen, zyklischen Gruppe<br><br>• Begriff: Isomorphie von Gruppen<br>Nachweise einiger vermuteter Isomorphismen, z.B.:<br>1. Eine zyklische Gruppe der Ordnung n ist isomorph zur Restklassengruppe mod n.<br>2. Isomorphie zwischen den Gruppen $\left[\mathbb{R}_{>0}\ ,\ \cdot\right]$ und $\left[\mathbb{R}\ ,\ +\right]$ vermöge $\varphi(x) = \ln(x)$ | Bei den Beweisen dieser Eigenschaften sollten Fragen der „Beweisökonomie“ (Geltung dieser Eigenschaften in **allen** Gruppen) herausgestellt werden.<br>Es bietet sich an, exemplarisch einige Gleichungen in gegebenen Gruppen zu lösen (z.B. in Permutationsgruppen).<br>Anhand der erstellten Gruppentafeln können die Schüler die Existenz zyklischer Gruppen nachweisen.<br>Es ist naheliegend zu zeigen, dass zyklische Gruppen kommutativ sind.<br>Die erstellten Gruppentafeln lassen zwischen den Gruppen gewisse „Strukturgleichheiten“ erkennen, welche von den Schülern präzisiert werden sollten (Eineindeutigkeit der Zuordnung, Operationstreue). |

## MA-12/1 : Analysis (75 Stunden )

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 10 | **Weiterführung der Differentialrechnung (30 Std.)**<br>• Wiederholungen zu Inhalten der Klassenstufe 11<br>• Untersuchungen gebrochen-rationaler Funktionen unter den Aspekten:<br>– maximale Definitionsmenge<br>– Verhalten in der Umgebung von Definitionslücken<br>– Asymptotenfunktionen (Verhalten für $x \to \infty$ bzw. $x \to -\infty$ ) | Komplexe Übungen zu Anwendungssituationen mit bisher behandelten Funktionenklassen.<br>Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion sollte grob (unter Stetigkeitsgesichtspunkten) ohne vollständige Kurvendiskussion (d.h. ohne Untersuchung auf relative Extrema und Wendepunkte) skizziert werden können. |
| 10 | • Funktionsuntersuchungen komplexerer Art mit:<br>– trigonometrischen Funktionen<br>– Wurzelfunktionen<br>– gebrochen-rationalen Funktionen<br>• Funktionsscharen | Hier ist an eine exemplarische Auswahl gedacht, die unterschiedliche rechentechnische Strategien bei den verschiedenen Funktionenklassen verdeutlicht.<br>Die Beschränkung auf einen Parameter erscheint sinnvoll.<br>Auch Ortskurven, z.B. der relativen Extrema / Wendepunkte einer Schar kommen in Betracht. |
| 10 | • Satz von Rolle<br>• 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung<br>• Globaler Monotoniesatz | Die Sätze eignen sich besonders zur Vergabe von Referaten.<br>Die Anwendung der Sätze sollte nicht zu kurz kommen. |
| 10 | **Integralrechnung (30 Std.)**<br>• Inhalte von Flächen unter Graphen als Grenzwerte<br>• Eine Definition des bestimmten Integrals (Riemann-Integral) für auf [a , b] definierte und beschränkte Funktionen mittels ausgezeichneter Zerlegungsfolgen<br>• Beispiel einer nicht integrierbaren Funktion<br>• Existenz des bestimmten Integrals für auf dem Integrationsintervall monotone bzw. stetige Funktionen<br>• Eigenschaften des bestimmten Integrals (Intervalladditivität, Linearität) | Flächeninhalte als Grenzwerte von Folgen von Ober- bzw. Untersummen berechnen.<br>Definition z.B. mittels Ober- und Untersummen oder mittels Riemannscher Zwischensummen.<br>Für den Nachweis der Integrierbarkeit einer über [a , b] stetigen Funktion ist die Aussage des Satzes über die gleichmäßige Stetigkeit erforderlich. |
| 10 | • Mittelwertsatz der Integralrechnung, Integralfunktion, Hauptsatz der Differential- und Integral-Rechnung<br>• Stammfunktion, unbestimmtes Integral | Geometrische Interpretation des Mittelwertsatzes. |

# MA-12/1 : Analysis (75 Stunden )

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| | • Satz über die Differenz zweier Stammfunktionen $F_1$, $F_2$ einer Funktion f<br>• Berechnen einfacher bestimmter Integrale mittels Stammfunktionen<br>• Methode der partiellen Integration | Ermittlung von Stammfunktionen mittels partieller Integration. |
| 10 | • Inner- und außermathematische Anwendungen: Flächeninhalte, Volumen von Rotationskörpern (Kugel, Paraboloid, Ellipsoid), physikalische Arbeit | Die Substitutionsmethode steht an dieser Stelle noch nicht zur Verfügung. Bei der Ermittlung des Volumens von Rotationskörpern bei Rotation um die y-Achse sollte auch die Zylinder-Schalen-Methode angewendet werden. |
| 15 | **Kontrahierende Abbildungen (Iterationsverfahren)**<br>• Banachscher Fixpunktsatz<br>• Konvergenzordnung<br>• Konvergenzverbesserung | Das früher behandelte Newtonverfahren sollte mit seiner Iterationsvorschrift: $x_{n+1} := \varphi(x_n)$ mit $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ einbezogen werden.<br><br>Es bietet sich an, auch das verallgemeinerte Verfahren von Heron: $x_{n+1} := \frac{1}{k} \cdot \left( (k-1) \cdot x_n + \frac{a}{x_n^{k-1}} \right) \rightarrow \sqrt[k]{a}$ entsprechend zu interpretieren.<br><br>Bei der Konvergenzverbesserung genügt es, die Addition eines linearen Terms (mit geeigneter 'Steigung' - z.B. 1. MWS) zu behandeln. |

**MA-12/2 : Analysis** **(75 Stunden )**

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 15 | **Exponential- und Logarithmusfunktion**<br><br>• Einführung der ln-Funktion über das Integral $\ln(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \cdot dt \; ; \quad x \in \mathbb{R}^+$<br><br>• Folgerungen aus der Integraldefinition (einzige Nullstelle, Stetigkeit, Differenzierbarkeit, Monotonie)<br><br>• Herleitung der Funktionalgleichung der ln-Funktion, Ermittlung der Wertemenge $W(\ln) = \mathbb{R}$<br><br>• Ermittlung der Basis der ln-Funktion mit Hilfe der Zwischeneigenschaft des bestimmten Integrals<br><br>• Aus den obigen Betrachtungen ergibt sich $\int \frac{dx}{x} = \ln(\lvert x \rvert) + C \; ; \; x \in \mathbb{R} \; , \; x \neq 0$<br><br>• Einführung der e-Funktion als Umkehrfunktion der ln-Funktion, Eigenschaften der e-Funktion | Äquivalente Zugänge sind hier natürlich möglich.<br><br>Dieser Weg bietet sich wegen seiner Effektivität an. - Es werden alle zentralen Begriffe aus der Analysis angewendet.<br><br>Die Eigenschaften der e-Funktion ergeben sich als Folgerungen aus den entsprechenden Eigenschaften der ln-Funktion. |
| 10 | **Weiterführung der Differential- und Integralrechnung (60 Std.)**<br><br>• Integration mittels Substitution, Differentiale<br><br>• Integrale der Form $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln(\lvert f(x) \rvert) + C$<br><br>• Integration mittels einfacher Partialbruchzerlegungen<br><br>• Arcus-Funktionen | Es werden nur reelle Nullstellen des Nennerpolynoms betrachtet. |
| 10 | • Regeln von de l'Hospital<br><br>• Funktionsuntersuchungen zur e-Funktion und ln-Funktion<br><br>• Uneigentliche Integrale | Beweis einer Regel, Mitteilung der anderen Varianten. |
| 15 | • Weitere Anwendungen der Integralrechnung (Bogenlänge, Oberflächen von Rotationskörpern)<br><br>• Numerische Integrationsmethoden | Als Anwendung für die Bogenlänge bietet es sich an, die Krümmung eines Funktionsgraphen in einem Kurvenpunkt zu ermitteln. |

**<u>MA-12/2</u> : Analysis (75 Stunden )**

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 10 | • Satz von Taylor mit Restglied<br>• Darstellung von Funktionen durch Taylorreihen | Mittels Restgliedabschätzung sollten einige Funktionen exemplarisch in eine Taylorreihe entwickelt werden. |
| 15 | • Einfache gewöhnliche, lineare Differentialgleichungen<br><br>• Zusammenfassendes kleines Projekt | Über die Modellierung realer Prozesse (Wachstum, Zerfall,...) gelangt man zu entsprechenden Differentialgleichungen. Gedacht ist hier an die Anwendung elementarer Lösungsverfahren (Trennung der Variablen).<br><br>Es ist an eine komplexe Aufgabenstellung (etwa ein Auftrag an die Schüler) zu ausgewählten, bisher behandelten Gebieten gedacht. |

**MA-13/1 : Lineare Algebra und Analytische Geometrie** **(75 Stunden )**

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 10 | **Analytische Geometrie**<br><br>Der affine (Punkt-) Raum ($A^3$ ; Geometrie) mit dem zugehörigen Vektorraum der Verschiebungen ($V^3$)<br><br>• die 3 Axiome des Zusammenhangs<br>• affines Koordinatensystem und zugehörige (kanonische) Basis des Vektorraumes<br><br>Geometrische Probleme (im affinen Raum):<br><br>• Punkte, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$<br>• Untersuchung von Lagebeziehungen | Hier soll exemplarisch die Operation einer Gruppe auf einer Menge (einfach transitive Wirkung), d.h. die Nutzung einer beigeordneten Struktur verdeutlicht werden.<br><br>An geeigneten Stellen können die Kenntnisse und Voraussetzungen aus dem $\mathbb{R}^2$ sinnvoll aufgegriffen werden.<br><br>Lagebeziehungen Gerade/Ebene und Ebene/Ebene sollten nur beispielhaft behandelt werden. |
| 10 | Geometrische Probleme (mit Skalarprodukt):<br><br>• Skalarprodukt (Abstände; Längen; Winkel zwischen Geraden; Abstand eines Punktes von einer Geraden; Flächeninhalt eines Dreiecks; Abstand windschiefer Geraden; Cauchy- Schwarzsche Ungleichung) | Zentraler Aspekt ist der geometrische Gedanke der Projektion auf eine vorgegebene Richtung. |
| 10 | • Ebenengleichung in Normalen- (Koordinaten-) form; normierte Vektoren - Ebenenabstand zum Ursprung (Hessesche Normalenform; Abstand: Punkt - Ebene)<br><br>• Inzidenzuntersuchungen komplexerer Art; Gerade - Ebene; Ebene - Ebene; Schnittwinkel usw. | Hier ist auch an die variable Herleitung von Ebenengleichungen aus unterschiedlichen bestimmenden Objekten gedacht.<br><br>Empfohlene Ergänzung: Kugeln im $\mathbb{R}^3$ ; Inzidenzuntersuchungen mit Geraden und Ebenen; Tangentialebenen |
| 12 | **Lineare Abbildungen**<br><br>Lineare Abbildungen als strukturverträgliche Abbildungen zwischen Vektorräumen.<br>Begriffsbildungen:<br>• Kern(f) als Unterraum des Urbildraumes; Zusammenhang mit Lösungsmenge eines homogenen LGS (dreidimensional-geometrisch: 3-Ebenenschnitt durch den Ursprung)<br>• Bild(f) als Unterraum des Bildraumes<br>• Matrix $A_f$ als basisabhängige Darstellung einer linearen Abbildung mit den Spaltenvektoren als Bilder der Basisvektoren; Rang ($A_f$) = dim Bild(f); Interpretation eines inhomogenen LGS über Bild(f) (dreidimensional-geometrisch; 3-Ebenenschnitt, aus dem Ursprung verschoben)<br>• Rangbestimmung mit Hilfe elementarer Umformungen<br>• Dimensionssatz | LGS mit den Fragen nach der Lösungsmenge sollte stets auch in den äquivalenten Darstellungen interpretiert werden:<br>$f(\vec{x}) = \vec{b}\ ,\ A_f \circ \vec{x} = \vec{b}\ ,\ \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \vec{a}_i = \vec{b}\ .$ |

**MA-13/1 : Lineare Algebra und Analytische Geometrie** **(75 Stunden )**

| Std. | Lerninhalte | Anmerkungen |
|---|---|---|
| 13 | • Hintereinanderausführung linearer Abbildungen (Matrizenmultiplikation); Matrizenaddition und -vervielfachung<br>• Inverse Matrizen (Existenz der Umkehrabbildung); Eindeutige Lösbarkeit von LGS mit den dazugehörigen Interpretationen, z.B.: dim Kern(f) = 0 etc.<br>• Anwendungsaufgaben (z.B.: mehrstufige Produktionsprozesse etc.) | |
| 10 | **Determinanten**<br><br>Das Kreuzprodukt, entwickelt aus der geometrischen Senkrechtrichtung im $\mathbb{R}^3$ (Bestimmung von Normalenvektoren) mit seinen Eigenschaften:<br><br>• Flächeninhaltsbestimmung über Betrag<br>• Verträglichkeit mit Skalarprodukt - Spatprodukt (Volumenbestimmung z.B. einer dreiseitigen Pyramide)<br>• Determinanten (zweireihige als Komponenten eines Normalenvektors; dreireihige als Volumen eines Spats)<br>• Determinantenentwicklungssatz; Cramersche Regel | Aus Zeitgründen wird man sich bei dem Determinantenentwicklungssatz und der Cramerschen Regel evtl. mit einer propädeutischen, beispielorientierten Einsicht begnügen müssen. |
| 10 | **Kegelschnitte im $\mathbb{R}^2$**<br><br>• graphische Darstellung verschiedener Quadriken (gegebenenfalls ohne Mittelpunktsverschiebung) aus quadratischen Gleichungen in zwei Variablen<br>• Hauptachsentransformation im $\mathbb{R}^2$ (Drehmatrizen)<br>• Interpretation mit Hilfe affiner Abbildungsmatrizen | An eine eigenständige Theorie der Kegelschnitte mit der Entwicklung der unterschiedlichen Gleichungsformen (Mittel-, Scheitel-, Brennpunktsform) und Herleitung der Eigenschaften etc. ist nicht gedacht. |